concours Advance

ÉPREUVE ORALE
ENSEIGNEMENT OPTIONNEL DE MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(Enseignement optionnel de Mathématiques Complémentaires)

CONSIGNES AUX CANDIDATS

Durée de l'épreuve : 30 minutes

L'oral de mathématiques permet de vous évaluer sur la qualité de votre démarche de résolution des exercices en rapport avec le programme, votre maîtrise du programme, ainsi que l'agilité et la vitesse de résolution dont vous saurez faire preuve. Il permet en outre d'harmoniser votre niveau avec celui de tous les autres candidats.

Déroulement

- Afin de tenir compte de l'avancement de chacun dans le programme de Terminale et de vous permettre de démontrer vos compétences dans les meilleures conditions, vous disposerez d'une certaine marge de choix : vous pourrez éliminer un certain nombre de thèmes sur lesquels vous ne serez pas interrogé.
- Deux ou trois exercices vous seront ensuite proposés par l'examinateur. Après un temps de préparation, vous échangerez avec lui sur votre méthode de résolution.

Critères d'évaluation

- Maîtrise des savoirs disciplinaires liés au programme de terminale
- Capacités à dérouler un raisonnement et l'exposer de manière claire et rigoureuse
- Autonomie dans la résolution des exercices (avec ou sans aide de l'examinateur)

Notation

- Résolution de l'exercice
- Connaissance du cours associé au thème retenu
- Rapidité dans la résolution de l'exercice

Il est conseillé de s'exercer sur chacun des thèmes proposés et de s'entraîner à résoudre les exercices « à haute voix », seul ou avec des camarades de classe, en explicitant votre méthode de résolution ainsi que les éléments de cours mis en oeuvre dans la même limite de temps que le jour de l'épreuve orale.

OPTION MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES

Nous allons étudier les thèmes suivants :

- Suites
- Limites de fonctions
- Dérivée d’une fonction, convexité et variation
- Fonctions logarithmes et exponentielles
- Statistique et probabilités

THÈME 1 : SUITES

Suite arithmético-géométrique

On considère les suites u et v telles que $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{et} \quad v_n = u_n - 6.$$

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Correction

Rappel :

a) Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si pour tout n entier naturel on a :

$$u_{n+1} = u_n + r, \quad \text{où} \quad r \quad \text{est la raison de cette suite.}$$

b) Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n, \quad \text{où} \quad q \quad \text{est la raison de cette suite.}$$

1. Pour vérifier qu'une suite est arithmétique, on calcule la différence des termes $u_{n+1} - u_n$ et si pour tout n, on obtient la même constante alors la suite (u_n) est arithmétique.
   On a $u_0 = 1$, calculons u_1 et u_2 :

   $$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 3 = \frac{7}{2}, \qquad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 3 = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} + 3 = \frac{19}{4}$$

   $$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_0 = \frac{5}{2} \\ u_2 - u_1 \neq \frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)\,\text{n'est pas une suite arithmétique.}$$

   De même, pour vérifier qu'une suite est géométrique, on calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et si pour tout n, on obtient la même constante alors la suite (u_n) est géométrique.

   $$\left.\begin{array}{l} \frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{2} \\ \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)\,\text{n'est pas une suite géométrique.}$$

   Donc la suite (u_n) est ni arithmétique, ni géométrique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n - 6 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. On sait que la suite (v_n) est géométrique donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Grâce à l'expression de $v_n = u_n - 6$, on peut facilement calculer $v_0 = u_0 - 6 = -5$. Ainsi

$$v_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or,

$$v_n = u_n - 6 \Rightarrow u_n = v_n + 6$$
$$\Rightarrow u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6.$$

Déterminer la raison et calculer des termes

1. La suite (u_n) est arithmétique. $u_0 = -2$ et $r = 5$. Déterminer u_{15}.
2. La suite (v_n) est arithmétique. $v_6 = 4$ et $r = -3$. Déterminer v_{15}.
3. La suite (w_n) est arithmétique. $w_4 = 2$ et $w_{10} = 14$. Déterminer la raison r et w_0.
4. La suite (t_n) est arithmétique. $t_2 + t_3 + t_4 = 12$. Déterminer t_3.

Correction

Rappel : (u_n) est **arithmétique** de raison r si et seulement si pour tout naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

1. Comme la suite (u_n) est arithmétique, donc
$$u_n = u_0 + nr = -2 + 5n \Rightarrow u_{15} = -2 + 5 \times 15 = 73.$$
2. Cherchons v_0. Comme la suite (v_n) est arithmétique, donc
$$v_n = v_0 + nr \Rightarrow v_6 = v_0 + 6r = v_0 + 6 \times (-3) = v_0 - 18$$
Or, $v_6 = 4 \Rightarrow v_0 - 18 = 4 \Rightarrow v_0 = 22$. On pourra donc écrire
$$v_n = 22 + n \times (-3) \Rightarrow v_{15} = 22 + 15 \times (-3) = -23.$$
3. Comme la suite (w_n) est arithmétique, avec $w_4 = 2$ et $w_{10} = 14$. On pourra donc écrire (w_n) comme suit :
$w_{10} = w_4 + 6r$ car entre w_4 et w_{10} nous avons 6 termes. Alors,
$$w_{10} = w_4 + 6r \Rightarrow 14 = 2 + 6r \Rightarrow 6r = 12 \Rightarrow r = 2.$$
On peut aussi écrire
$$w_4 = w_0 + 4r \Rightarrow w_0 = w_4 - 4r = 2 - 4 \times 2 \Rightarrow w_0 = -6.$$
4. Comme la suite (t_n) est arithmétique, avec $t_2 + t_3 + t_4 = 12$. On pourra donc écrire les termes t_3 et t_4 comme suit :
$t_3 = t_2 + r \Rightarrow t_2 = t_3 - r$ et $t_4 = t_3 + r$. On remplace t_2 et t_4 dans la somme des termes ci-dessus et on obtient
$$t_2 + t_3 + t_4 = (t_3 - r) + t_3 + (t_3 + r) = 3\,t_3$$
Or,
$$t_2 + t_3 + t_4 = 12 \Rightarrow 3\,t_3 = 12 \Rightarrow t_3 = 4.$$

Suite arithmético-géométrique

Un lac contient 70 centaines de grenouilles hermaphrodites, elles peuvent changer de sexe au cours de leur vie. La population est supposée stable au cours du temps.

Au début de l'année 2020, le lac contient 7 centaines de mâles, et 63 centaines de femelles.

Chaque année, 20% des mâles deviennent femelles, et de même, 20% des femelles deviennent mâles.

Soit u_n le nombre de centaines de mâles au début de l'année $2020 + n$. Il est clair que $u_0 = 7$.

1. Montrer que $u_1 = 18,2$
2. Montrer que $u_{n+1} = 0,6u_n + 14$ pour tout naturel n.
3. Que dire de (u_n) ?
4. Exprimer u_n en fonction de n pour tout naturel n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ et conclure.

Correction

1. $u_1 = u_0 \times 0,80 + (70 - u_0) \times 0,20 = 7 \times 0,80 + (70 - 7) \times 0,20 = 7 \times 0,80 + 63 \times 0,20 = 18,2$.

2. Pour tout naturel n : $u_{n+1} = u_n \times 0,80 + (70 - u_n) \times 0,20 = 0,80u_n + 70 \times 0,20 - 0,20u_n = 0,6 \times u_n + 14$.

3. Pour tout naturel n : $u_{n+1} = 0,6 \times u_n + 14$.
   Par conséquent, (u_n) est **arithmético-géométrique** de paramètres $a = 0,6$ et $b = 14$.

4. Recherchons une formule explicite pour (u_n) en 3 étapes :

   Etape 1 : On a : $l = al + b \Leftrightarrow l = 0,6l + 14 \Leftrightarrow 0,4l = 14 \Leftrightarrow l = \frac{14}{0,4} = 35$

   Etape 2 : On considère alors la suite v_n définie par $v_n = u_n - 35$, pour tout naturel n.

   Montrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $a = 0,6$:
   Soit n un entier naturel, $v_{n+1} = u_n + 1 - 35 = 0,6 \times u_n + 14 - 35 = 0,6 \times u_n - 21$.

Or : $0,6 \times v_n = 0,6 \times (u_n - 35) = 0,6 \times u_n - 0,6 \times 35 = 0,6 \times u_n - 21$.
Ainsi : $v_{n+1} = 0,6 \times v_n$, et ceci est vrai pour tout entier naturel n.
Donc (v_n) est bien **géométrique** de raison $0,6$.

Etape 3 : Notons que $v_0 = u_0 - 35 = 7 - 35 = -28$.
Comme (v_n) est géométrique de raison $0,6$ et de premier terme -28, on obtient :

$$v_n = (-28) \times 0,6^n.$$

Par ailleurs, comme $v_n = u_n - 35$, on obtient : $v_n + 35 = u_n$. Ce qui donne finalement :

$$u_n = (-28) \times 0,6^n + 35$$

5. Comme $0<0{,}6<1$, on a : $\lim_{n\to+\infty}(0,6^n) = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 35$.
   Le nombre de mâles tend vers 35 centaines.

   Remarquons que, comme la population totale est de 70 centaines de grenouilles, le nombre de femelles tend également vers 35 centaines.

Modéliser un problème à l'aide d'une suite géométrique

Un entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 euros pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois.

1. Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.
2. Que peut-on penser de l'évolution de la somme total du capital investi dans un futur éloigné ?

Correction

Rappel : Somme des termes d'une suite géométrique

n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1. On note (u_n) le capital injecté au n-ième mois. Une baisse régulière de 30% est associée à une suite géométrique de raison $1 - 30\%$ alors $u_{n+1} = 0,7u_n$.
   (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $u_0 = 20\,000$.

   Le total du capital investi à la fin de la première année est :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{11} \\ &= 20\,000 + 20\,000 \times 0,7 + 20\,000 \times 0,7^2 + \cdots + 20\,000 \times 0,7^{11} \\ &= 20\,000 \times (1 + 0,7 + 0,7^2 + \cdots + 0,7^{11}) \\ &= 20\,000 \times \frac{1 - 0,7^{12}}{1 - 0,7} \\ &\approx 65\,744 \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

   En reprenant le principe des calculs effectués dans la question 1, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= 20\,000 \times \frac{1 - 0,7^{n+1}}{1 - 0,7} \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} 0,7^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} 0,7 \times 0,7^n = 0, \text{ car } 0 \leq q = 0,7 < 1.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} S_n &= 20\,000 \times \frac{1 - 0,7^{n+1}}{1 - 0,7} \\ &= 20\,000 \times \frac{1}{1 - 0,7} \\ &= \frac{20\,000}{0,3} \\ &\approx 66\,666,67 \end{aligned}$$

Dans un futur éloigné, la somme totale du capital investi tend à se rapprocher de $66\,666,67$ euros.

THÈME 2 : LIMITES DES FONCTIONS

Limite d'une fonction - forme indéterminée - asymptote

Déterminer les limites suivantes et interpréter graphiquement :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 5x^2 + 1, \quad 2)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-x},$$

$$3)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x-1}{2x^2+x}, \quad 4)\ \lim_{x\to+\infty} (2x-3)\times\frac{1}{x+1}.$$

Correction

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 - 5x^2 + 1$. On obtient facilement

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -5x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 5x^2 + 1 = +\infty - \infty$$

ce qui conduit à une forme indéterminée. Afin de lever l'indétermination, il faudrait mettre en facteur le terme prépondérant. Cela veut dire, on factorise par le terme "dominant" de la somme $2x^3 - 5x^2 + 1$. On obtient :

$$2x^3 - 5x^2 + 1 = x^3\left(2 - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) = x^3\left(2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Et donc

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit} \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{2x^3 - 5x^2 + 1} = (+\infty)\times\mathbf{2} = +\infty.$$

Donc il n'y a ni asymptote horizontale, ni verticale en $+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{1-x}$. On obtient facilement

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{par quotient} \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1-x}} = \mathbf{0}.$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x-1}{2x^2+x}$. Au dénominateur, on se trouve dans le cas d'une forme indéterminée $+\infty - \infty$. Afin de lever l'indétermination, il faudrait mettre en facteur le terme prépondérant. Cela veut dire, on factorise par le terme "dominant" au numérateur et au dénominateur. On obtient

$$\frac{x^3+x-1}{2x^2+x} = \frac{x^3\left(1+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{x}{x^2}\right)} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{2+\frac{1}{x}}$$

On obtient facilement,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x} = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \text{par quotient} \lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \frac{\mathbf{x^3+x-1}}{\mathbf{2x^2+x}} = -\infty.$$

Donc il n'y a ni asymptote horizontale, ni verticale en $-\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-3)\times\frac{1}{x+1}$. On se trouve dans le cas d'une forme indéterminée $+\infty\times 0$. Afin de lever l'indétermination, il faudrait mettre en facteur le terme prépondérant. Cela veut dire, on factorise par le terme "dominant" au numérateur et au dénominateur. On obtient

$$(2x-3)\times\frac{1}{x+1} = \frac{2x-3}{x+1} = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}.$$

On obtient facilement,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{3}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{par quotient} \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} (\mathbf{2x-3})\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x+1}} = \mathbf{2}.$$

Donc la droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Limite de suite géométrique

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad 2)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}, \qquad 3)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{2^{2n}},$$

$$4)\ \lim_{n\to+\infty}(-1)^n, \qquad 5)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Correction

Rappel sur la limite de q^n :

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Nous sommes dans le cas où $q=\frac{2}{3}$, et $-1<\frac{2}{3}<1$ Donc
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}$. Nous sommes dans le cas où $q=2$, et $2>1$. Donc
$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty.$$
$$\Rightarrow \text{par quotient } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$
Autre méthode : On pourra réécrire $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Nous sommes dans le cas où $q=\frac{1}{2}$, et $-1<\frac{1}{2}<1$. Donc
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$. Réecrivons d'abord la suite $\frac{3^n}{2^{2n}}$ sous la forme q^n. On a

$$\frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{(2^2)^n} = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Nous sommes dans le cas où $q = \frac{3}{4}$, et $-1 < \frac{3}{4} < 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{2^{2n}} = 0.$$

4. $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$. Nous sommes dans le cas où $q = -1$ et $q \leq -1$.
Donc la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$. Réecrivons d'abord la suite $\frac{(-1)^n}{2^n}$ sous la forme q^n. On a

$$\frac{(-1)^n}{2^n} = \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Nous sommes dans le cas où $q = \frac{-1}{2}$, et $-1 < \frac{-1}{2} < 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0.$$

Limite d'une fonction - asymptote

Déterminer les limites suivantes. En déduire les éventuelles asymptotes :

$$1)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{1+2e^x}, \qquad 2)\ \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^x,$$
$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \left(x^3+\frac{1}{x}+3\right)\sqrt{x}, \qquad 4)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\ln x}{x^2}.$$

Correction

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8}{1+2e^x}$. Sachant que la $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on obtient facilement
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 8 = 8\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+2e^x = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{par quotient } \lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{1+2e^x}} = \mathbf{8}.$$
Donc la droite horizontale d'équation $y = 8$ (parallèle à l'axe des abscisses) est une asymptote en $-\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^x$. Sachant que la $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on obtient facilement
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} (\mathbf{x+1})\mathbf{e^x} = +\infty.$$
Donc il n'y a ni asymptote horizontale, ni verticale en $+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+\frac{1}{x}+3\right)\sqrt{x}$. On obtient facilement,
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+\frac{1}{x}+3 = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \left(\mathbf{x^3}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}+\mathbf{3}\right)\sqrt{\mathbf{x}} = +\infty.$$
Donc il n'y a ni asymptote horizontale, ni verticale en $+\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1+\ln x}{x^2}$. Sachant que la $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$, on obtient facilement
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0} 1+\ln x = -\infty\\ \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0,\ \text{ et } x^2 \text{ reste strictement positif}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{par quotient } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{1+\ln x}}{\mathbf{x^2}} = -\infty.$$
Donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale en 0.

Limite et encadrement - Théorème des gendarmes

Déterminer les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} x+\cos(x), \qquad 2)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2x)}{x}, \qquad 3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}, \qquad 4)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}.$$

Correction

Théorème de comparaison

On a $f(x) \leq g(x)$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos(x)$. On a

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$x-1 \leq x+\cos(x) \leq 1+x$$

$$\left.\begin{array}{r} x-1 \leq x+\cos(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par comparaison } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{x}+\cos(\mathbf{x}) = +\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(2x)}{x}$.

Théorème des gendarmes

On a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Soit $x > 0$

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1$$

Donc

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(2x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Or,

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{d'après le théorème des gendarmes } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\sin(\mathbf{2x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$. Soit $x > 0$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Donc

$$x - 1 \leq x + \sin(x) \leq 1 + x$$

D'où

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{x+\sin(x)}{x} \leq \frac{x+1}{x}$$

Or,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{d'après le théorème des gendarmes } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\mathbf{x}+\sin(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

Limite importante : $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$

Soit $x > 0$, on pourra écrire

$$\frac{\sin(2x)}{x} = 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x}.$$

On pose $X = 2x$, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1.$$

Donc

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin(\mathbf{2x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{2}.$$

THÈME 3 : DÉRIVÉE D'UNE FONCTION, CONVEXITÉ ET VARIATION

Dérivée d'une fonction

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$1) f(x) = \ln(x^2+1), \qquad 2) g(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}, \qquad 3) h(x) = e^{-2x+1} + 3\ln(x^2)$$

Correction

1. La fonction $f(x)$ est de la forme $\ln u$ et $f'(x) = \frac{u'}{u}$
   On pose, $u = x^2+1 \Rightarrow u' = 2x$, on obtient
$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$
2. La fonction $g(x)$ est de la forme $\sqrt{u}$ et $g'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
   On pose, $u = \ln(x^2+1) \Rightarrow$ d'après 1) $u' = f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, on obtient
$$g'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} = \frac{2x}{x^2+1} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}}.$$
3. La fonction $h(x)$ est de la forme $e^u + 3\ln v$ et $h'(x) = u'e^u + 3\frac{v'}{v}$
   On pose, $u = -2x+1 \Rightarrow u' = -2$ et $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$, on obtient
$$h'(x) = (-2) \times e^{-2x+1} + 3 \times \frac{2x}{x^2} = -2 \times e^{-2x+1} + \frac{6}{x}.$$

Dérivée d'une fonction

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1)k(x)=\frac{10-x}{2x}, \qquad 2)g(x)=\sqrt{3x+1}+(-2x+1)^3, \qquad 3)q(x)=(\ln(x+1))^{2020}$$

Correction

1. La fonction $k(x)$ est de la forme $\frac{u}{v}$ et $k'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
On pose, $u=10-x \Rightarrow u'=-1$ et $v=2x \Rightarrow v'=2$, on obtient

$$k'(x)=\frac{(-1)\times(2x)-(10-x)\times 2}{(2x)^2}=\frac{-2x-20+2x}{4x^2}=\frac{-20}{4x^2}=-\frac{5}{x^2}.$$

2. La fonction $g(x)$ est de la forme $\sqrt{u}+v^3$ et $g'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}+3v'v^2$
On pose, $u=3x+1 \Rightarrow u'=3$ et $v=-2x+1 \Rightarrow v'=-2$, on obtient

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}+3\times(-2)\times(-2x+1)^2=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}-6\times(-2x+1)^2.$$

3. La fonction $q(x)$ est de la forme u^{2020} et $q'(x)=2020\times u'\times u^{2019}$
On pose, $u=\ln(x+1) \Rightarrow u'=\frac{1}{x+1}$, on obtient

$$q'(x)=2020\times\frac{1}{x+1}\times(\ln(x+1))^{2019}=\frac{2020}{x+1}\times(\ln(x+1))^{2019}.$$

Dérivées et convexité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}.$$

1. Etudier la convexité de la fonction f.
2. Déterminer le point d'inflexion A de C_f.

Correction

1. **la convexité de la fonction f.**
   Rappel : Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle $]a;b[$.
   $*$ Si $f'' \geq 0$ sur $]a;b[$, alors f est convexe sur sur $]a;b[$.
   $*$ Si $f'' \leq 0$ sur $]a;b[$, alors f est concave sur sur $]a;b[$.
   Cette propriété est valable si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

   Etudions le signe de $f''(x)$:

$$f'(x) = -3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + 0 = -3x^2 - 3x \Rightarrow f''(x) = -3 \times 2x - 3 = -6x - 3.$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 3 = 0 \Leftrightarrow -6x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

   De plus, son coefficient directeur -6 est strictement négatif. D'où le tableau de signes de f'' ci-dessous.

x	$-\infty$		$-0,5$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

   Par conséquent, f est convexe sur $]-\infty; -0,5]$ et concave sur $[-0,5; +\infty[$.
2. f'' s'annule en $-\frac{1}{2}$ en changeant de signe, par conséquent, C_f admet un point d'inflexion A en $-\frac{1}{2}$
   Comme
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$$
   le point d'inflexion A a donc pour coordonnées $(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$.

Dérivée et variation

Déterminer $f'(x)$, puis le signe de $f'(x)$ sur I, et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle I (sans les limites) :

1. $f(x) = 5e^{-x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 5x \ln x + x$ sur $I =]0, +\infty[$

Correction

1. $f(x) = 5e^{-x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   On pose $f = k\, e^u$ avec $k = 5$ et $u = -x^2 + 1$. D'où $f'(x) = k\, u' e^u$ avec $u' = -2x$.
   Soit $f'(x) = 5 \times (-2x) \times e^{-x^2+1} = -10x\, e^{-x^2+1}$. f' est un produit de 2 facteurs.
   On résout $f'(x) = 0$, on aura :
   $*$ $-10x$ de coefficient -10 strictement négatif, et s'annule pour $x = 0$.
   $*$ e^{-x^2+1} est une exponentielle, et donc par définition, elle est strictement positive.
   Le signe de f' et le sens de variation de la fonction f sont donnés ci-dessous, avec $f(0) = 5e^{-0^2+1} = 5e$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-10x$		$+$	0	$-$	
e^{-x^2+1}		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$5e$	↘	

2. $f(x) = 5x \ln x + x$ sur $I =]0, +\infty[$
   On pose $f = uv + x$ avec $u = 5x$ et $v = \ln x$. D'où $f'(x) = u'v + uv' + 1$ avec $u' = 5$ et $v' = \frac{1}{x}$.
   Soit $f'(x) = 5 \ln x + 5x\frac{1}{x} + 1 = 5 \ln x + 5 + 1 = 5 \ln x + 6$. f' est une somme de termes.
   On va chercher pour quels x, $5 \ln x + 6 > 0$:

$$5 \ln x + 6 > 0 \Leftrightarrow 5 \ln x > -6 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{6}{5} \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^{-\frac{6}{5}} \Leftrightarrow x > e^{-1,2}.$$

   De même, on obtient $5 \ln x + 6 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow x = e^{-1,2}$.
   Le signe de f' et le sens de variation de la fonction f sont donnés ci-dessous.

x	0		$e^{-1,2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	↘	$f(e^{-1,2})$	↗	

THÈME 4 : FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Simplifier une expression avec des logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

$$1)\ln 6-\ln 2,\quad 2)\ln(e^2),\quad 3)\ln\left(\frac{1}{e^x}\right),\quad 4)e^{\ln 4},\quad 5)e^{2\ln 5},\quad 6)e^{-\ln 3},\quad 7)\ln(\sqrt{e}),\quad 8)\ln(e^{-x}).$$

Correction

Rappelons d'abord les propriétes du cours

- $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b,\ a>0\quad\text{et}\quad b>0.$
- Pour tout $x\in\mathbb{R},\ \ln e^x=x.$
- $e^{\ln a}=a,\ a>0.$
- $\ln a^n=n\ln a,\ n\in\mathbb{N}\quad\text{et}\quad a>0.$
- $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a,\ a>0.$

En utilisant les propriétés ci-dessus, on obtient :

1. $\ln 6-\ln 2=\ln\frac{6}{2}=\ln 3$
2. $\ln(e^2)=2$
3. $\ln\left(\frac{1}{e^x}\right)=\ln 1-\ln e^x=0-x=-x$
4. $e^{\ln 4}=4$
5. $e^{2\ln 5}=e^{\ln 5^2}=5^2=25$
6. $e^{-\ln 3}=\frac{1}{e^{\ln 3}}=\frac{1}{3}$
7. $\ln(\sqrt{e})=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$
8. $\ln(e^{-x})=-x$

Étude de fonction logarithme

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 3x - \ln(2x-1).$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f sur D_f.
3. En déduire que f admet pour minimum $2,5 - \ln\frac{2}{3}$ sur D_f.

Correction

1. $f(x)$ existe si et seulement si $2x-1>0$, soit : $x > \frac{1}{2}$. Donc $D_f =]\frac{1}{2}; +\infty[$.

2. On pose $u = 2x-1$, et donc $u' = 2$.
   Ici $f(x) = 3x - \ln u$, et par là $f'(x) = 3 - \frac{u'}{u}$. Donc

$$f'(x) = 3 - \frac{2}{2x-1} = \frac{3(2x-1)}{2x-1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{6x-3-2}{2x-1} = \frac{6x-5}{2x-1}.$$

On résout $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x-5}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-5=0 \\ \text{et} \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ \text{et} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Le signe de f' et le sens de variation de la fonction f sont donnés ci-dessous.

x	$0,5$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$6x-5$		$-$	0	$+$	
$2x-1$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	↘		↗	

Et par là, on en déduit que la fonction f admet pour minimum

$$f(\frac{5}{6}) = 3 \times \frac{5}{6} - \ln\left(2 \times \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{5}{2} - \ln\frac{2}{3} = 2,5 - \ln\frac{2}{3}.$$

Équations avec des logarithmes

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \qquad (E)$$

Clara affirme que cette équation admet deux solutions. A-t-elle raison ? Justifier.

Correction

1. **Conditions d'existence :**

$$\begin{cases} 6x-2>0 \\ 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x>2 \\ 2x>1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x>\frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x>\tfrac{1}{2}$$

l'équation E a un sens que lorsque $x>\frac{1}{2}$. Finalement, $D_E=]\frac{1}{2};+\infty[$.

2. **Résolvons** $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$. D'après les propriétés :
   - $\ln(A)+\ln(B)=\ln(A\times B)$
   - $\ln(A)=\ln(B)\Leftrightarrow A=B$

   On obtient :

$$\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)\Leftrightarrow \ln[(6x-2)(2x-1)]=\ln(x)\Leftrightarrow(6x-2)(2x-1)=x$$

$$\Leftrightarrow 12x^2-11x+2=0$$

Il s'agit de résoudre un polynôme de degré 2, de discriminant $\Delta=b^2-4ac=25$, avec $a=12$, $b=-11$ et $c=2$. L'équation admet deux racines :

$$x_1=\frac{11-5}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{11+5}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

La solution $\frac{1}{4}$ est à rejeter car elle n'appartient pas à D_E, et $x_2=\frac{2}{3}\in D_E$.
Donc l'équation admet une seule solution $\frac{2}{3}$. Donc l'affirmation de Clara est fausse.

Équations - Inéquations avec des logarithmes et exponentielles

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x+3} + 1 \leq 3$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+2)(x-1) = \ln(2x+10)$

Correction

1. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. Donc $D_E = \mathbb{R}$.

$$e^{x+3} + 1 \leq 3 \Leftrightarrow e^{x+3} \leq 3 - 1 \Leftrightarrow e^{x+3} \leq 2 \Leftrightarrow \ln e^{x+3} \leq \ln 2 \Leftrightarrow x + 3 \leq \ln 2 \Leftrightarrow x \leq \ln 2 - 3.$$

Donc l'ensemble de solution $\mathbf{S} =]-\infty; \ln \mathbf{2} - \mathbf{3}]$. Notons que $\ln 2 - 3 \approx -2,31$.

2. La fonction $\ln x$ est définie sur $]0; +\infty[$.
Dans notre cas, on doit avoir $(x+2)(x-1) > 0$ **et** $2x + 10 > 0$. Etudions ces deux inégalités :
   - $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 > 0$, il s'agit d'un trinôme de racines -2 et 1, à coefficient dominant 1 strictement positif. Donc $(x+2)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.
   - $2x + 10 > 0$, soit $x > -5$.

Donc, finalement : $D_E =]-5; -2[\cup]1; +\infty[$.

Résolvons $\ln(x+2)(x-1) = \ln(2x+10) \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 2x + 10 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$.

Il s'agit de résoudre un polynôme de degré deux, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 49$, avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -12$. L'équation admet deux racines :

$$x_1 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Ces 2 racines appartiennent à D_E.
Donc l'ensemble des solutions $\mathbf{S} = \{-\mathbf{3}; \mathbf{4}\}$.

THÈME 5 : PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Lois discrètes

Dans chacun des cas suivants, on prélève un jeton au hasard dans un sac. X est la variable aléatoire donnant le numéro du jeton tiré .

— La variable X suit-elle une loi uniforme.

— Si c'est le cas, donner sa loi de probabilité et son espérance.

1. Le sac contient 30 jetons numérotés de 1 à 30.
2. Le sac contient 30 jetons numérotés de 1 à 3. Quinze jetons portent le numéro 1, dix jetons portent le numéro 2 et cinq jetons portent le numéro 3.
3. Le sac contient 30 jetons numérotés de 1 à 3. Dix jetons portent le numéro 1, dix jetons portent le numéro 2 et dix jetons portent le numéro 3.

Correction

1. X suit la **loi uniforme** sur $E = \{1, 2, 3, ..., 30\}$.
   On a : $X(\Omega) = E$. Et, pour tout k dans E, $\mathbf{p(X = k) = \frac{1}{30}}$.
   La variable aléatoire X suivant la **loi uniforme** sur E admet pour espérance :
   $$E(X) = \frac{1 + 30}{2} = 15, 5.$$
2. On a : $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
   — quinze jetons portent le numéro 1, cela veut dire que $p(X = 1) = \frac{15}{30}$,
   — dix jetons portent le numéro 2, cela veut dire que $p(X = 2) = \frac{10}{30}$,
   — cinq jetons portent le numéro 3, cela veut dire que $p(X = 3) = \frac{5}{30}$.
   On voit bien que ces 3 probabilités ne sont pas égales. La loi n'est donc pas uniforme.
3. X suit la **loi uniforme** sur $E = \{1, 2, 3\}$.
   On a : $X(\Omega) = E$. Et, pour tout k dans E, $\mathbf{p(X = k) = \frac{10}{30}}$.
   La variable aléatoire X suivant la **loi uniforme** sur E admet pour espérance :
   $$E(X) = \frac{1 + 3}{2} = 2.$$

Lois discrètes

Un virus a contaminé 1% de la population. On considère un échantillon de 100 personnes.
La population est suffisamment importante pour assimiler cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de malades dans l'échantillon.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement 5 malades dans l'échantillon. On arrondira le résultat au dix millième.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 5 malades dans l'échantillon. On donnera une valeur arrondie au dix millième.
4. Déterminer la probabilité que le nombre de malades dans l'échantillon soit dans l'intervalle $[2; 5]$. On donnera une valeur arrondie au dix millième.

Correction

1. Le choix de l'échantillon revient à répéter 100 fois de manière **indépendante** une expérience à 2 issues :
   S : "la personne est malade"
   E :"la personne n'est pas malade".
   On a $p(S) = 0,01$, et X dénombre le nombre de "succès".
   On en déduit que X suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 100$ et $p = 0,01$.

2. A la calculatrice, on obtient : $p(X = 5) \approx 0,0029$.

3. On cherche $p(X \geq 5)$.
   Or $p(X \geq 5) = 1 - p(X < 5) = 1 - p(X \leq 4)$.
   Et à la calculatrice, on obtient : $p(X \leq 4) \approx 0,9966$.
   Donc $p(X \geq 5) \approx 0,0034$.

4. On cherche $p(2 \leq X \leq 5) = p(X \leq 5) - p(X < 2) = p(X \leq 5) - p(X \leq 1)$.
   Et à la calculatrice, on obtient : $p(X \leq 5) \approx 0,9995$ **et** $p(X \leq 1) \approx 0,7358$. Donc

$$p(2 \leq X \leq 5) \approx 0,9995 - 0,7358 \approx 0,2637.$$

Lois à densité

Soit b un réel strictement supérieur à 1 et f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1; b]$.

1. Montrer que f est positive et continue.
2. Déterminer b pour que f soit une densité.

Correction

1. Il est clair que pour tout réel b strictement supérieur à 1, la fonction f est positive sur $[1; b]$. La fonction inverse $\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et par là, f est dérivable sur $[1; b]$, et donc f y est continue.
2. Par conséquent, f étant positive et continue, l'aire située entre C_f et l'axe des abscisses vaut :

$$A = \int_1^b f(x)dx$$

Or :

$$\int_1^b f(x)dx = \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b - 0 = \ln b$$

Donc : $A = \ln b$.

Donc, d'après la question 1, f est une densité si et seulement si

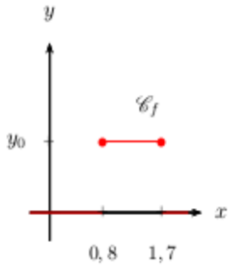
$$A = \int_1^b f(x)dx = 1$$

On résout donc : $A = 1 \Leftrightarrow \ln b = 1 \Leftrightarrow b = e$.

Finalement, f est une **densité** si et seulement si $b = e$.

Lois à densité

1. De quel type est la loi X associée à la densité f représentée ci-contre ? On déterminera la valeur de y_0.



2. Déterminer $P(1 \leq X \leq 1,5)$.
3. Quelle est l'espérance m de X ?

Correction

1. La fonction f est constante sur un intervalle et nulle ailleurs. Donc X suit une loi uniforme. L'intervalle étant $[0,8;1,7]$, la densité f est telle que $f(x) = \frac{1}{1{,}7-0{,}8} = \frac{1}{0{,}9} \approx 1,111$. C'est d'ailleurs la valeur de y_0.
2. $$p(1 \leq X \leq 1,5) = \int_1^{1{,}5} f(x)dx = \int_1^{1{,}5} \frac{1}{0,9}dx = \frac{1}{0,9}\int_1^{1{,}5} 1dx = \frac{1}{0,9}[x]_1^{1{,}5} = \frac{1}{0,9}(1,5-1)$$
   Soit
   $$p(1 \leq X \leq 1,5) = \frac{0,5}{0,9} \approx 0,556.$$
   Autre méthode : X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,8;1,7]$, donc
   $$p(1 \leq X \leq 1,5) = \frac{1,5-1}{1,7-0,8} = \frac{0,5}{0,9} \approx 0,556.$$
3. L'espérance d'une variable aléatoire uniforme X à valeurs dans l'intervalle $[a;b]$ est définie par $E(X) = \frac{a+b}{2}$. Donc $m = \frac{1{,}7+0{,}8}{2} = 1,25$.