

Première partie – Calculs

Exercice I

I-A- $\frac{(2\sqrt{3})^2 \times 12^3 \times 3^2}{3^{-4} \times (\sqrt{2})^4} = 3^{10} \times 2^8.$

Faux.

$$\frac{(2\sqrt{3})^2 \times 12^3 \times 3^2}{3^{-4} \times (\sqrt{2})^4} = \frac{4 \times 3 \times (4 \times 3)^3 \times 3^2}{3^{-4} \times 2^2} = \frac{2^2 \times 3 \times (2^2 \times 3)^3 \times 3^2}{3^{-4} \times 2^2} = \frac{2^2 \times 3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^2}{3^{-4} \times 2^2} = 3^{1+3+2+4} \times 2^{2+6-2} = 3^{10} \times 2^6.$$

I-B- $2\sqrt{27} - (2\sqrt{3} - 1)^2 = 10\sqrt{3} - 13.$

Vrai.

$$2\sqrt{27} - (2\sqrt{3} - 1)^2 = 2\sqrt{9 \times 3} - (4 \times 3 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 1 + 1) = 2 \times 3\sqrt{3} - (13 - 4\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} - 13.$$

I-C- $\ln\left(\frac{e}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{9e}\right) + \ln(36e) = 1.$

Vrai.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{9e}\right) + \ln(36e) &= \ln(e) - \ln(4) - \ln(9e) + \ln(36) + \ln(e) \\ &= 1 - 2\ln(2) - \ln(9) - \ln(e) + 2\ln(6) + 1 \\ &= 2 - 2\ln(2) - 2\ln(3) - 1 + 2\ln(2) + 2\ln(3) = 1. \end{aligned}$$

I-D- $e^{2\ln 3 + \ln 5} + e^{-2\ln 5} = 20.$

Faux.

$$e^{2\ln 3 + \ln 5} + e^{-2\ln 5} = e^{2\ln 3} \times e^{\ln 5} + e^{\ln 5^{-2}} = 3^2 \times 5 + 5^{-2} = 45 + \frac{1}{25} \neq 20.$$

I-E- Pour tout nombre réel x différent de -2 et de 2 , $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}.$

Vrai.

$$\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{1(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2x-4-x-2+8}{x^2-4} = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}.$$

I-F- Pour tout nombre réel x , $\frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^{x+1}} = e^x + 1.$

Vrai.

$$\frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^{x+1}} = \frac{(e^x + 1)^2}{e^{x+1}} = e^x + 1.$$

Deuxième partie – Fonctions

Exercice II

II-A- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ admet pour dérivée $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}.$

Faux.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

II-B- La fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$

Vrai.

$$F'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

II-C- La fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (\ln(3x))^2$ admet pour dérivée la fonction $f'(x) = \frac{2}{3x} \ln(3x).$

Faux.

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{3x} \times \ln(3x) = \frac{2}{3x} \ln(3x).$$

II-D- $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x) - x) = -\infty$.

Faux.

$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x)) = 0$ (limite de référence) donc $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x) - x) = 0$.

II-E- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - \ln(x)) = 0$.

Faux.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x(e^x - \frac{\ln(x)}{x})\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ (limite de référence)

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x(e^x - \frac{\ln(x)}{x})\right) = +\infty$ (par produit).

Exercice III

Soient f la fonction définie pour tout nombre réel x différent de 1 par $f(x) = \frac{3}{1-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

III-A- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

Faux.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{1-x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

III-B- Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = -1$ est $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

Faux.

$f(-1) = \frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$ donc $f'(-1) = \frac{3}{4}$.

Donc une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = -1$ est $y = \frac{3}{4}(x+1) + \frac{3}{2}$ soit $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

III-C- f est concave sur $]1; +\infty[$.

Vrai.

$f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$ donc $f''(x) = \frac{6}{(1-x)^3}$.

Sur $]1; +\infty[$, $f''(x) < 0$ donc f est concave sur $]1; +\infty[$.

Troisième partie – Suites numériques

Exercice IV

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \neq 0$ pour tout entier naturel n . Pour tout entier naturel n , on définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

IV-A- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par -1 .

Vrai.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors pour tout entier naturel n ,

$u_n \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{u_n} \leq 1$ et $\frac{2}{u_n} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2}{u_n} \geq -1$, ce qui traduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par -1 .

IV-B- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Faux.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = n+1$ est croissante, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{-2}{n+1}$ est aussi croissante.

IV-C- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Faux.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n par $v_n = -2(n+1)$ tend vers $-\infty$, ce qui signifie qu'elle diverge.

Quatrième partie – Probabilités

Exercice V

On lance cinq fois un dé à six faces. Cocher VRAI si la variable aléatoire proposée suit une loi binomiale et FAUX dans le cas contraire.

V-A- La variable aléatoire correspondant au nombre de lancers où apparaît un numéro pair.

Vrai.

V-B- La variable aléatoire correspondant à la somme des résultats de tous les lancers.

Faux.

Exercice VI

Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire E et P désigne une probabilité sur Ω .

A et B sont deux événements de probabilités respectives 0,6 et 0,4. On suppose de plus que $P(A \cup B) = 0,8$.

VI-A- $P(A \cap B) = 0,24$.

Faux.

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,4 - 0,8 = 0,2$.

VI-B- A et B sont des événements contraires.

Faux.

Si A et B sont des événements contraires, alors ils sont incompatibles et $P(A \cup B) = 1$, ce qui n'est pas le cas.

VI-C- A et B sont des événements indépendants.

Faux.

A et B sont des événements indépendants si, et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui n'est pas le cas.

VI-D- A et B sont des événements incompatibles.

Faux.

Si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cap B) = 0$, ce qui n'est pas le cas.

Cinquième partie – Géométrie dans le plan

Exercice VII

On considère les points A et B de coordonnées respectives dans un repère orthonormé : $A(2 ; 0)$ et $B(0 ; -4)$.

VII -A- Une équation de la droite (AB) est $2x - y - 4 = 0$.

Vrai.

$2x_A - y_A - 4 = 2 \times 2 - 0 - 4 = 0$ et $2x_B - y_B - 4 = 2 \times 0 + 4 - 4 = 0$.

L'équation est vérifiée par deux points distincts de la droite (AB) donc l'équation $2x - y - 4 = 0$ est bien une équation de la droite (AB) .

VII -B- Une équation de la médiatrice du segment $[AB]$ est $x + 2y + 3 = 0$.

Vrai.

La médiatrice Δ du segment $[AB]$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et passe par le milieu $I(1 ; -2)$ du segment $[AB]$.

Soit $M(x ; y)$ un point du plan.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{IM} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow -2x - 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3 = 0.$$

VII -C- Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

Faux

Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu $I(1 ; -2)$ du segment $[AB]$ et pour rayon $R = IA = \sqrt{(2-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{5}$.

Ainsi, l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ est :

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0.$$

VII -D- Le point de coordonnées $(-1 ; -1)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Vrai

$(-1)^2 + (-1)^2 - 2 \times (-1) + 4 \times (-1) = 0$ donc les coordonnées du point vérifient l'équation du cercle.

VII -E- La droite d'équation $2x - y + 1 = 0$ est tangente au cercle de diamètre $[AB]$.

Vrai

$2 \times (-1) - (-1) + 1 = 0$ donc le point P de coordonnées $(-1 ; -1)$ est un point d'intersection de cette droite et du cercle.

De plus, le vecteur $\overrightarrow{IP} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite.

La droite est donc perpendiculaire au rayon du cercle au point d'intersection, ce qui caractérise bien une tangente au cercle.