

REPONSES A L'EXERCICE I de Mathématiques Spécialité

<p>I-1-a- $u_1 = \frac{4}{3}$ $u_2 = \frac{9}{8}$</p>	<p>I-1-b- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 1.</p>
<p>I-2-a- $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$. En effet : Soit n un entier naturel.</p> $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \frac{3u_n+2-u_n(u_n+4)}{u_n+4} = \frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}.$ <p>Or $(1-u_n)(u_n+2) = u_n+2-u_n^2-2u_n = -u_n^2-u_n+2$.</p> <p>Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.</p>	
<p>I-2-b- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En effet : Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.</p> <p>Donc $1 - u_n \leq 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$.</p> <p>Ainsi, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.</p>	
<p>I-3- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. En effet : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1.</p>	
<p>I-4- $l = 1$. En effet : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$.</p> <p>Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$ donc $l \geq 1$.</p> <p>Donc $l + 4 \neq 0$,</p> <p>et $u_{n+1} = f(u_n) \Leftrightarrow l = \frac{3l+2}{l+4} \Leftrightarrow l^2 + 4l = 3l + 2 \Leftrightarrow l^2 + l - 2 = 0 \Leftrightarrow l = 1$ ou $l = -2$.</p> <p>Or $l \geq 1$, donc $l = -2$ est impossible.</p>	
<p>I-5- $v_0 = \frac{1}{4}$</p>	
<p>I-6-a- $v_{n+1} = k \times v_n$ avec $k = \frac{2}{5}$. En effet : Pour tout entier naturel n,</p> $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4} + 2} = \frac{\frac{3u_n+2-(u_n+4)}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2+2(u_n+4)}{u_n+4}} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2}{5} \times \frac{u_n-1}{u_n+2} = \frac{2}{5} v_n.$ <p>On peut en déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique (de raison $k = \frac{2}{5}$).</p>	
<p>I-6-b- $v_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$</p>	<p>I-6-c- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.</p> <p>En effet : $0 < \frac{2}{5} < 1$ (donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$).</p>
<p>I-7-a- $u_n = \frac{2v_n+1}{1-v_n}$</p>	<p>I-7-b La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.</p> <p>En effet : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2v_n + 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - v_n = 1$.</p>

REPONSES A L'EXERCICE II de Mathématiques Spécialité

<p>II-1- Solution générale de (E_1) :</p> $z(t) = \frac{1}{K} + Ce^{-t} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center;">t</td> <td style="width: 35%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 50%; text-align: right;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Variations de f</td> <td style="text-align: center;">$\frac{10}{1+a}$</td> <td style="text-align: center;">  </td> </tr> </table>	t	0	$+\infty$	Variations de f	$\frac{10}{1+a}$	
t	0	$+\infty$					
Variations de f	$\frac{10}{1+a}$						
<p>II-3- $f(t) = 5$ pour $t \in \{\ln(a)\}$.</p> <p>En effet : $f(t) = 5 \Leftrightarrow \frac{10}{1+ae^{-t}} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{1+ae^{-t}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = 1 + ae^{-t} \Leftrightarrow 1 = ae^{-t} \Leftrightarrow e^t = a$ $\Leftrightarrow t = \ln(a).$</p>							
<p>II-4-a- Si $z(t) = \frac{1}{y(t)}$ alors $z'(t) = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$.</p>							
<p>II-4-b- z solution de $(E_1) \Leftrightarrow z'(t) + z(t) = \frac{1}{K}$ pour tout réel t positif (Ligne 1)</p> <p style="margin-left: 100px;">$\Leftrightarrow -\frac{y'(t)}{(y(t))^2} + \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{K}$ pour tout réel t positif (Ligne 2)</p> <p style="margin-left: 100px;">$\Leftrightarrow y'(t) = y(t) - \frac{(y(t))^2}{K}$ pour tout réel t positif (Ligne 3)</p> <p style="margin-left: 100px;">$\Leftrightarrow y'(t) = y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$ pour tout réel t positif $\Leftrightarrow y$ solution de (E_2).</p>							
<p>II-5-a- $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{K} + Ce^{-t}} = \frac{K}{1 + CKe^{-t}}$ où $C \in \mathbb{R}$.</p>							
<p>II-5-b- $a = \frac{K}{y_0} - 1$</p>							
<p>II-6- $a > 0$. En effet : $0 < y_0 < K$ donc $\frac{K}{y_0} > 1$ et $\frac{K}{y_0} - 1 > 0$.</p>							
<p>II-7-a- $y(5) = 5$ pour $a = e^5$.</p>							
<p>II-7-b- La valeur exacte de y_0 est $y_0 = \frac{10}{e^5 + 1}$.</p> <p>En effet : $a = \frac{10}{y_0} - 1$.</p> <p>Donc $a = e^5 \Leftrightarrow \frac{10}{y_0} - 1 = e^5 \Leftrightarrow \frac{y_0}{10} = \frac{1}{e^5 + 1} \Leftrightarrow y_0 = \frac{10}{e^5 + 1}$.</p>							
<p>II-7-c- Il faudra réintroduire 67 marmottes.</p>							