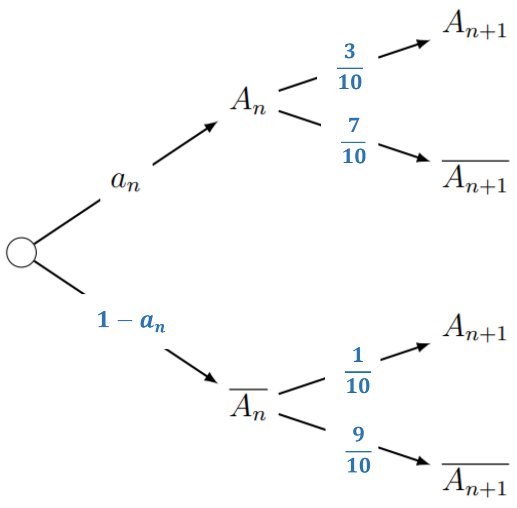
REPONSES A L'EXERCICE I de Mathématiques Spécialité

I-1- $a_1 = \frac{1}{5}$.

I-2-



I-3- $P(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{3}{10} a_n$.

$P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = \frac{1}{10}(1 - a_n)$.

I-4- $a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n + \frac{1}{10}$. En effet :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$$

$$= \frac{3}{10} a_n + \frac{1}{10}(1 - a_n) = \frac{1}{5} a_n + \frac{1}{10}.$$

I-5-a- $u_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$.

I-5-b- La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

En effet : $u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{8} = \frac{1}{5} a_n + \frac{1}{10} - \frac{1}{8} = \frac{1}{5}\left(u_n + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{40} = \frac{1}{5} u_n + \frac{1}{40} - \frac{1}{40} = \frac{1}{5} u_n$.

I-6-a- Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{3}{40}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

I-6-b- Pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{3}{8 \times 5^n} + \frac{1}{8}$

En effet : $a_n = u_n + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{8} = \frac{3}{8 \times 5^n} + \frac{1}{8}$.

I-7- La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $l = \frac{1}{8}$

En effet : $0 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.

I-8-a- Pour tout entier naturel n non nul, $a_n > \frac{1}{8}$.

En effet : Pour tout entier naturel n non nul, $\frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n > 0$.

I-8-b- $n_0 = 7$

En effet : $a_n - \frac{1}{8} < 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-5}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n < \frac{8}{3} 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{8}{3} 10^{-5}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{8}{3}10^{-5}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \text{ car } \ln\left(\frac{1}{5}\right) < 0. \text{ Or } \frac{\ln\left(\frac{8}{3}10^{-5}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \approx 6,54.$$

REPONSES A L'EXERCICE II de Mathématiques Spécialité

II-1- L'ensemble des solutions de l'équation $X^2 - 4X + 2 = 0$ est $\{2-\sqrt{2}\ ;\ 2+\sqrt{2}\}$.

En effet : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 = 8$. Donc l'équation admet deux solutions réelles :

$X_1 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$ et $X_2 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$.

II-2- $J(\ 2\ ;\ 1\ ;\ -\sqrt{3}\ )$ $L(\ 2\ ;\ 1\ ;\ \sqrt{3}\ )$

II-3-a- $\lambda = \frac{a}{4}$

II-3-b-	A) segment $[AE]$	B) droite (AE)	C) cercle de diamètre $[AE]$	D) plan de vecteur normal $\overrightarrow{AE}$

II-4- $IJ^2 = (2-a)^2 + 1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2$. $IL^2 = (2-a)^2 + 1 + \sqrt{3}^2$.

II-5-a- $m = 1$ $n = -4$ $p = 2$

En effet : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} = (2-a)^2 + 1^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 4a + a^2 + 1 - 3 = a^2 - 4a + 2$.

II-5-b- Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont orthogonaux si et seulement si $a \in \{2-\sqrt{2}\ ;\ 2+\sqrt{2}\}$.

II-6-a- Les points I, J et L définissent un plan.

En effet : Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont non nuls (car $1 \neq 0$) et orthogonaux donc non colinéaires.

II-6-b- Le vecteur $\vec{n}\,(1\ ;\ \sqrt{2}\ ;0)$ est normal au plan (IJL).

En effet : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IL}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJL) donc il est normal au plan (IJL).

II-6-c- Une équation cartésienne du plan (IJL) est $x + \sqrt{2}y - 2 - \sqrt{2} = 0$

En effet : Le vecteur $\vec{n}\,(1\ ;\ \sqrt{2}\ ;0)$ est normal au plan (IJL) donc une équation cartésienne de (IJL) est de la forme : $x + \sqrt{2}y + d = 0$.

De plus, $I(2+\sqrt{2}; 0; 0) \in (IJL)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan et on a $x_I + y_I + d = 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = -2 - \sqrt{2}$.

Donc une équation cartésienne du plan (IJL) est $x + \sqrt{2}y - 2 - \sqrt{2} = 0$.

II-7- Une représentation paramétrique de la droite (CG) est $\begin{cases} x = t \\ y = 2\ ; t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$

II-8- $K(\ 2-\sqrt{2}\ ;\ 2\ ;\ 0\ )$. En effet : $K = (CG) \cap (IJL)$. Ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ x + \sqrt{2}y - 2 - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-\sqrt{2} \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t = 2-\sqrt{2} \end{cases}.$$

II-9- Le quadrilatère $IJKL$ est un carré.