Corrigé du baccalauréat Métropole 11 mai 2022

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : fonctions et suites**

Partie A

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0 ; 10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :
$f'(t) = 3\mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5\mathrm{e}^{0,5t+1} = \mathrm{e}^{-0,5t+1}(+-3(0,5t+1)) = (-1,5t+3)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$
Donc $\forall t \in [0 ; 10]$, $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$

   b. $\forall t \in [0 ; 10]$, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$.
$-0,5t+1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$.
Dans le tableau : $f(0) = 0$, $f(2) = 6\mathrm{e}^0 = 6$ et $f(10) = 30\mathrm{e}^{-5+1} = 30\mathrm{e}^{-4}$.
D'où le tableau de variation de f :

x	0		2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	6	↘	$30\mathrm{e}^{-4}$

   c. Le maximum de la fonction f est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.

2. **a.** Sur l'intervalle $[0 ; 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0 ; 6]$. Or $5 \in [0 ; 6]$, donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[0 ; 2]$.
À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.

   b. D'après le tableau de variations, $f(t) \geqslant 5 \iff t \in [\alpha ; \beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie A

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$.
Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Soi $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.

$u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leqslant 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leqslant 0,7u_{n+1} < 4,2$

donc $0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6$.

Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ.

c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (théorème du point fixe).

$l = 0,7l + 1,8 \iff 0,3l = 1,8 \iff l = 6$. Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 6$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.

a. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7\left(-u_n + \dfrac{4,2}{0,7}\right)$
$= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 0,7n_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

b. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

c. $u_n \geqslant 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geqslant -0,5 \iff 0,7^n \leqslant \dfrac{-0,5}{-4}$

$\iff \ln\left(0,7^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leqslant -\ln(8) \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0,7)}$ car $\ln(0,7) < 0$

Donc $n \geqslant -\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}$. À la calculatrice : $-\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$ donc $n \geqslant 6$.

Cela signifie que $u_6 \geqslant 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7e qui correspond à u_6).

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace.**

1. **a.** La droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 2-t \\ z &=& 2+2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Si B appartient à la droite $\mathscr{D}$ alors $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -1 &=& 1+2t \\ 3 &=& 2-t \\ 0 &=& 2+2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2t &=& -2 \\ -t &=& 1 \\ 2t &=& -2t \end{array}\right. \iff t = -1. \text{ Donc } B \in \mathscr{D}.$$

c. On a $A(-1 ; 1 ; 3)$ et $B(-1 ; 3 ; 0)$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = 0\times 2 + 2\times(-1) + (-3)\times 2 = -8$

2. **a.** Le plan $\mathscr{P}$ passant par A est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$. Donc $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{u}$ (vecteur directeur de $\mathscr{D}$).

Son équation cartésienne sera de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où $(a; b; c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan.

En prenant comme vecteur normal à $\mathscr{P}$ le vecteur $\overrightarrow{u}$, on obtient : $\mathscr{P}\ :\ 2x - y + 2z + d = 0$.

Or $A \in \mathscr{P}$ donc $-2 - 1 + 6 + d = 0$ donc $d = -3$. Donc $\mathscr{P}$ a pour équation $2x - y + 2z - 3 = 0$

b. Le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$, noté H, est l'unique point d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$. Résolvons donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl}2x - y + 2z - 3 &=& 0\\ x &=& 1 + 2t\\ y &=& 2 - t\\ z &=& 2 + 2t\end{array}\right.$$. On remplace x, y et z dans la première équation :

$2x - y + 2z - 3 = 0 \iff 1(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0 \iff 9t + 1 = 0 \iff t = -\dfrac{1}{9}$.

On remplace la valeur de t dans les trois dernières équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x &=& 1 + 2\times -\dfrac{1}{9} = \dfrac{7}{9}\\ y &=& 2 - \left(-\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{19}{9}\\ z &=& 2 + 2\times -\dfrac{1}{9} = \dfrac{16}{9}\end{array}\right.$$. Donc $H\left(\dfrac{7}{9} ; \dfrac{19}{9} ; \dfrac{16}{9}\right)$.

c. Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ avec $A(-1 ; 1 ; 3)$ et $H\left(\dfrac{7}{9} ; \dfrac{19}{9} ; \dfrac{16}{9}\right)$: $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{16}{9}\\ \frac{10}{9}\\ -\frac{11}{9}\end{pmatrix}$.

Donc $\left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(\dfrac{16}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{9}\right)^2 + \left(-\dfrac{11}{9}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{477}}{9} = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$

3. **a.** Les points H et B appartiennent à $\mathscr{D}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, tout comme $\overrightarrow{u}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{HB} = k\times\overrightarrow{u}$.

b. D'après les propriétés du produit scalaire, et en utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{u}$.

Or les points A et H appartiennent au plan $\mathscr{P}$ normal à la droite $\mathscr{D}$, donc tout vecteur de $\mathscr{P}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathscr{D}$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u} = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{u} = k\times\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = k\ \overrightarrow{u}^2 = k\parallel\overrightarrow{u}\parallel^2$ donc $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}}{\parallel\overrightarrow{u}\parallel^2}$.

c. On a $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc $\parallel\overrightarrow{u}\parallel = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = -8$ donc $k = \dfrac{-8}{3^2} = -\dfrac{8}{9}$.

Donc en posant $H(x ; y ; z)$ et $B(-1 ; 3 ; 0)$ alors $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\\-z\end{pmatrix}$.

De plus $\overrightarrow{HB} = k \times \overrightarrow{u} = -\dfrac{8}{9} \times \overrightarrow{u}$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} -1-x & = & -\dfrac{8}{9} \times 2 \\ 3-y & = & -\dfrac{8}{9} \times (-1) = \dfrac{19}{9} \\ -z & = & -\dfrac{8}{9} \times 2 \end{array}\right.$

Donc $x = \dfrac{16}{9} - 1 = \dfrac{7}{9}$, $y = 3 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{19}{9}$ et $z = \dfrac{16}{9}$. On retrouve les coordonnées du point H.

4. Les points A, H et C appartiennent au plan $\mathscr{P}$. H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$. Le tétraèdre $BAHC$ a pour base le triangle AHC et pour hauteur BH.

Donc $\mathscr{V}_{BAHC} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}_{AHC} \times BH$ d'où $\mathscr{A}_{AHC} = \dfrac{3 \times \mathscr{V}_{BAHC}}{BH}$.

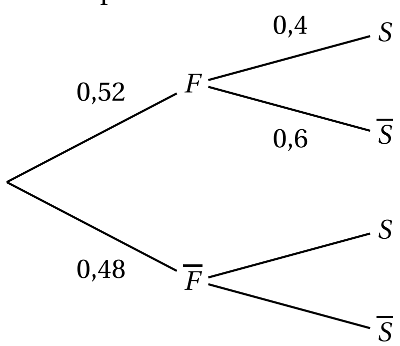
D'après la question **3.c**, $\overrightarrow{HB} = k \times \overrightarrow{u} =$ donc $\overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}$ donc $HB = \sqrt{\left(\dfrac{16}{9}\right)^2 + \left(-\dfrac{8}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{16}{9}\right)^2} = \dfrac{8}{3}$

Donc $\mathscr{A}_{AHC} = \dfrac{3 \times \dfrac{8}{9}}{\dfrac{8}{3}} = 1$ unité d'aire.

EXERCICE 3 (7 points) **Thèmes : probabilité, loi binomiale.**

1. **a.** L'énoncé nous indique que ce stage a été suivi par 25 % des salariés. Donc $p(S) = 0,25$.

b. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



c. On calcule $p(F \cap S)$: $p(F \cap S) = p_S(F) \times p(S) = 0,4 \times 0,52 = 0,208$

d. On cherche calculer $p_S(F)$. D'après la formule de Bayes,
$p_S(F) = \dfrac{p(F \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,208}{0,25} = 0,832$

e. Appliquons la formule des probabilités totales : $p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \overline{F})$.
Donc $p\left(S \cap \overline{F}\right) = p(S) - p(S \cap F) = 0,25 - 0,208 = 0,042$.

Avec la formule de Bayes : $p_{\overline{F}}(S) = \dfrac{p\left(S \cap \overline{F}\right)}{p\left(\overline{F}\right)} = \dfrac{0,042}{0,48} = 0,00875 < 0,1$.

L'affirmation du directeur est donc exacte.

2. **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X est la variable aléatoire qui compte les succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$: $X \sim \mathscr{B}(20; 0,25)$

b. $p(X = 5) = \dbinom{20}{5} \times 0,25^5 \times (1 - 0,25)^{20-5} \approx 0,202$.

La probabilité qu'exactement 5 salariés suivent le stage est d'environ 0,202.

c. « proba(5) » calcule pour k allant de 0 à 5, la somme des probabilités $p(X = k)$,
Soit $p(X \leqslant 5)$. À la calculatrice, $p(X \leqslant 5) \approx 0,617$.
Cela signifie que la probabilité qu'au plus 5 salariés aient effectué le stage, est égale à 0,617.
La probabilité qu'au moins 6 salariés suivent le stage est d'environ 0,617.

d. $p(X \geqslant 6) = 1 - p(X < 6) = 1 - p(X \leqslant 5) \approx 1 - 0,617 \approx 0,383$

3. • Premier exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 000€ et 75 à 1 200€, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\dfrac{25 \times 1000 + 75 \times 1200}{100} = 1150$ €.

Après augmentation le salaire moyen passe à :
$\dfrac{25 \times 1000 \times 1,05 + 75 \times 1200 \times 1,02}{100} = 1180,50$ €.

L'augmentation moyenne est donc égale à $\dfrac{1180,5}{1150} \approx 1,0265$, soit une augmentation d'environ 2,65 %.

• Deuxième exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 200€ et 75 à 1 000€, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\dfrac{25 \times 1200 + 75 \times 1000}{100} = 1050$ €.

Après augmentation le salaire moyen passe à :
$\dfrac{25 \times 1200 \times 1,05 + 75 \times 1000 \times 1,02}{100} = 1080$ €.

L'augmentation moyenne est donc égale à $\dfrac{1080}{1050} \approx 1,0285$, soit une augmentation d'environ 2,85 %.

Conclusion : l'augmentation moyenne dépend de la répartition des salaires : on ne peut pas répondre à cette question.

EXERCICE 4 (7 points) — Thèmes : fonctions, convexité, limites.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$.

Donc la droite horizontale d'équation $y = -2$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f. $\boxed{\textbf{Réponse c}}$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Soit F une primitive de f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est de la forme $u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$, et admet pour primitives les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

En posant $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$, et en remarquant que $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$, on peut donc écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e}^{x^2} + k$.

Sachant que $F(0) = 1$ on en déduit que : $\dfrac{1}{2} + k = 1$ donc $k = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{Réponse d}}$

3. La courbe représentative est celle de la fonction f'. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f' est croissante sur $]-\infty~;~3]$ et décroissante sur $[3~;~+\infty[$.
$[0~;~2] \subset]-\infty~;~3]$, donc f' est croissante $[0~;~2]$.
La fonction est donc convexe sur $[0~;~2]$. **Réponse c**

4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x^2} + 2$ est continue et dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

Les primitives de la fonction f, ont pour dérivée f, qui est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc les fonctions F sont croissantes sur $\mathbb{R}$. **Réponse a**

5. $\forall x \in]0~;~+\infty[$, $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x^2+1} = 2\dfrac{x^2 \times \dfrac{\ln(x)}{x^2}}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = 2\,\dfrac{\dfrac{\ln(x)}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

Nous savons que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (croissances comparées) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **Réponse d**

6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(E)\ \ \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 12 = 0 \iff (\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e}^x - 12 = 0$.

On pose comme changement de variable : $X = \mathrm{e}^x$: $(E) \iff X^2 + X - 12 = 0$. Cette équation a pour solutions $X = -4$ et $X = -3$.

Or $X = \mathrm{e}^x > 0$ donc l'unique solution sera celle de l'équation $X = \mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln(3)$. **Réponse c**