Corrigé du baccalauréat Métropole 12 mai 2022

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thème : probabilités**

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

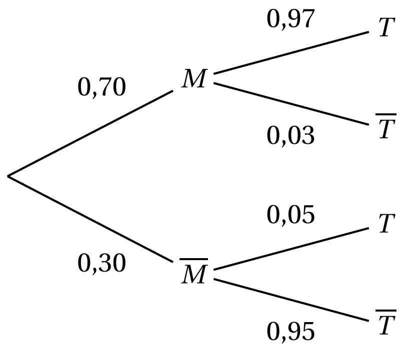
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

On calcule $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$

3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right)$; or

$P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$, d'où :

$P(T) = 0,679 + 0,015 = 0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

On calcule donc $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,679}{0,694} \approx 0,9784$ soit 0,978 au millième près.

5. **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.

On appelle « valeur prédictive négative du test » la probabilité que le coyote ne soit pas malade sachant que son test est négatif.

Elle est égale à $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{P\left(\overline{T} \cap \overline{M}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}$.

Or $P\left(\overline{T} \cap \overline{M}\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$;

- $P\left(\overline{T}\right) = 1 - P(T) = 1 - 0,694 = 0,306$;
- $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) = \dfrac{P\left(\overline{T} \cap \overline{M}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0,3 \times 0,95}{0,306} \approx 0,9313$, soit 0,931 au millième près.

b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Comme $0,978 > 0,931$ cela signifie qu'un résultat positif (erreur d'à peu près 2 %) est plus probant qu'un résultat négatif (erreur d'à peu près 7 %).

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0,694$.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

Le nombre de coyotes est assez important pour que toutes les captures indépendantes sont celles d'animaux dont la probabilité de positivité au test est de 0,694. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $P = 0,694$.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.

On sait que $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1 - 0,694)^{5-1} \approx 0,030$ soit 0,03 au centième près.

c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

On vérifie si effectivement $P(X \geqslant 4) > \dfrac{1}{2}$.

Or $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$;

$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,694^4 \times 0,306^1 \approx 0,3549$ et

$P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,694^5 \times 0,306^0 \approx 0,1609$

Donc $P(X \geqslant 4) \approx 0,3549 + 0,3549$, soit $P(X \geqslant 4) \approx 0,5158$ valeur supérieure à 0,5 : le vétérinaire a raison.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?

Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(Y \geqslant 1) > 0,99$ avec Y variable aléatoire associée au nombre de coyotes ayant un test positif.

Or $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,694^0 \times 0,306^n = 1 - 0,306^n$. Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,306^n$

Par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 > n \ln 0,306 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,306} < n$ car $\ln 0,306 < 0$.

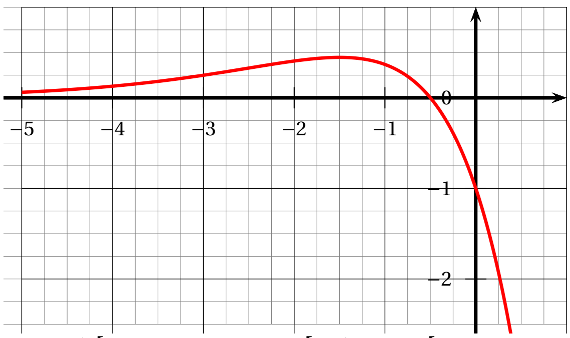
Comme $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,306} \approx 3,9$: il faut donc capturer au moins 4 coyotes.

Exercice 2 **(7 points)** **Thèmes : fonctions numériques et suites**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1 à 3 ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.
On admet que f' admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$.

On rappelle que la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f.



Question 1 :

a. La fonction f admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$;

b. La fonction f admet un maximum en $-\dfrac{1}{2}$;

c. La fonction f admet un minimum en $-\dfrac{1}{2}$;

d. Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.

Par lecture graphique, la dérivée est positive sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$ et négative sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$; f est donc croissante puis décroissante : elle admet donc un maximum en $-\dfrac{1}{2}$. Réponse **b.**

Question 2 :

a. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$;

b. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty;\,-\dfrac{1}{2}\right[$;

c. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion ;

d. la fonction f est concave sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$.

f' est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$: f est convexe sur cet intervalle. Réponse **a.**

Question 3 :
La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

a. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$;

b. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-2\,;\,-1]$;

c. $f''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$;

d. $f''(-3) = 0$.

On a déjà vu que f' est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$; elle est décroissante sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, donc $f''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 0$. Réponse **c.**

Question 4 :

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et de plus : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 3$.
On peut alors affirmer que :

a. la suite (v_n) converge ;

b. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0 ;

c. $1 \leqslant v_0 \leqslant 3$;

d. la suite (v_n) diverge.

Si (u_n) est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, donc la suite (v_n) est minorée par u_0. Réponse **b.**

Question 5 :

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
On peut alors affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge ;

b. la suite (u_n) converge ;

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$;

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$: la suite (u_n) est donc croissante.
D'autre part : pour $n \neq 0$, on peut écrire : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.
Conclusion : la suite (u_n) est croissante et elle majorée par 1 : elle converge donc. Réponse **b.**

Question 6 :

On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n, on a : $n < u_n < n+1$.
On peut affirmer que :

a. Il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ;

b. la suite (u_n) est croissante ;

c. la suite (u_n) est convergente ;

d. La suite (u_n) n'a pas de limite.

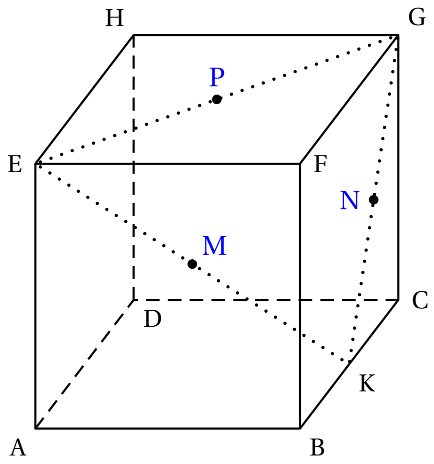
On a au rang n : $n < u_n < n+1$ et au rang $n+1$:
$n+1 < u_{n+1} < u_{n+2}$, donc $u_n < n+1 < u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante. Réponse **b.**

EXERCICE 3 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].
On se place dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.

   E(0; 0; 1), F(1; 0; 1), G(1; 1; 1), $\text{K}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).

   D'après la question précédente : $\overrightarrow{\text{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{EK}}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$.

   D'où $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{EG}} = 2-2+0=0$: ces deux vecteurs sont orthogonaux;
   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{EK}} = 2-1-1=0$: ces deux vecteurs sont orthogonaux.

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGK) est orthogonal à ce plan.

3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x-2y+z-1=0$.

   Le résultat précédent montre qu'une équation du plan (EGK) est $2x-2y+z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$.

   En particulier $\text{E}(0\,;\,0\,;\,1)\in(\text{EGK}) \iff 0-0+1=d \iff d=1$.

   On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{EGK}) \iff 2x-2y+z=1$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ECK) passant par F.

   La droite (d) étant orthogonale au plan (ECK), on peut prendre comme vecteur directeur de cette droite le vecteur $\overrightarrow{n}$. Elle contient F, donc :

   $$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(d) \iff \overrightarrow{\text{F}M}=t\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl}x-1 &=& t\times 2\\ y-0 &=& t\times(-2)\\ z-1 &=& t\times 1\end{array}\right.,\,t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl}x &=& 1+2t\\ y &=& -2t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.,\,t\in\mathbb{R}.$$

5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{7}{9}\right)$.

   L étant le projeté orthogonal de F sur le plan (EGK), L est un point de la droite (d) et du plan (EGK) : ses coordonnées vérifient donc les équations de (d) et du plan (EGK), donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t\\ y & = & -2t\\ z & = & 1+t\\ 2x-2y+z & = & 1\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

En remplaçant x, y, et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2(1+2t)-2\times(-2t)+1+t=1 \iff 2+4t+4t+t+1=1 \iff 9t=-2 \iff t=-\dfrac{2}{9}$. On a donc :

$x=1+2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$;

$y=-2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{4}{9}$;

$z=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$.

Conclusion : $\text{L}\left(\dfrac{5}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{7}{9}\right)$.

6. Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.

Avec $\text{L}\left(\frac{5}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{7}{9}\right)$ et $\text{F}(1\,;0\,;1)$, on a $\overrightarrow{\text{LF}}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}$.

Donc $\text{LF}^2=\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}=\frac{36}{81}$, d'où $\text{LF}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.

Le triangle (EFG) est rectangle en F, donc :

- On a $\mathscr{A}(\text{EFG})=\text{EF}\times\text{FG}\times\dfrac{1}{2}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
- $\mathscr{V}(\text{EFGK})=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{EFG})\times\text{BF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$.

8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.

On a aussi $\mathscr{V}(\text{EFGK})=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{EGK})\times\text{LF}$, soit $\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{EGK})\times\dfrac{2}{3}$ ou encore

$\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{9}\times\mathscr{A}(\text{EGK})$, d'où $\mathscr{A}(\text{EGK})=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$.

9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

D'après le théorème de la droite des milieux les côtés du triangle (PMN) ont une longueur moitié de celles du triangle (EGK). L'aire du triangle (PMN) est donc égale à $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ fois celle du triangle (EGK), donc $\mathscr{A}(\text{PMN})=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$.

Comme les trois points P, M et N appartiennent au plan (EGK) le triangle (PMN) appartient au plan (EGK) : la hauteur du tétraèdre FPMN est donc la même que celle du tétraèdre (EFGK) soit LF.

On a donc $\mathscr{V}(\text{FPMN})=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{PMN})\times\text{LF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{16}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{24}$.

EXERCICE 4 (7 points) **Thèmes : fonctions numériques, fonction exponentielle**

Partie A : études de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 0,06\left(-x^2 + 13,7x\right) \quad \text{et} \quad g(x) = (-0,15x + 2,2)\mathrm{e}^{0,2x} - 2,2.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

x	0		$6,85$		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$f(6,85)$	↘	$-\infty$

a. Justifier la limite de f en $+\infty$.
On a $f(x) = 0,06x^2\left(-1 + \dfrac{13,7}{x}\right)$
On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{13,7}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -1 + \dfrac{13,7}{x} = -1$ et par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. Justifier les variations de la fonction f.
La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -0,12x + 0,06 \times 13,7 = 0,822 - 0,12x$.
On a $0,822 - 0,12x > 0 \iff 0,822 > 0,12x \iff \dfrac{0,822}{0,12} > x \iff x < 6,85$.
De même $f'(x) < 0 \iff x > 6,85$.
La fonction f est donc croissante sur $[0~;~6,85]$ et décroissante sur $[6,85~;~+\infty[$.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
$f(x) = 0 \iff 0,06\left(-x^2 + 13,7x\right) = 0 \iff -x^2 + 13,7x = 0 \iff x(13,7 - x) = 0 \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0 \\ 13,7 &=& x \end{array}\right\rangle.$
On a donc $S = \{0~;~13,7\}$.

2. a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2,2 - 1,5x) = -\infty$; d'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$.
Par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} = -\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0~;~+\infty[$ on a : $g'(x) = (-0,03x + 0,29)\mathrm{e}^{0,2x}$.
g est un produit de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$, et sur cet intervalle :
$g'(x) = -0,15\mathrm{e}^{0,2x} + 0,2(-0,15x + 2,2)\mathrm{e}^{0,2x} = \mathrm{e}^{0,2x}(-0,15 - 0,03x + 0,44) = (-0,03x + 0,29)\mathrm{e}^{0,2x}$.

c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0~;~+\infty[$.
On a donc $g'(x) > 0 \iff (-0,03x + 0,29)\mathrm{e}^{0,2x} > 0 \iff -0,03x + 0,29 > 0$ car $\mathrm{e}^{0,2x} > 0$ quel que soit le réel x), puis
$0,29 > 0,03x \iff x < \dfrac{0,29}{0,03} \iff x < \dfrac{29}{3}$.
On obtient de la même façon que $g'(x) < 0 \iff x > \dfrac{29}{3}$.

La fonction g est donc croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{29}{3}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{29}{3}\,;\,+\infty\right[$.

Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

g a donc un maximum $g\left(\dfrac{29}{3}\right) = (-0,15 \times \frac{29}{3} + 2,2)\mathrm{e}^{0,2\times\frac{29}{3}} - 2,2 \approx 2,984$ soit 2,98 au centième près.

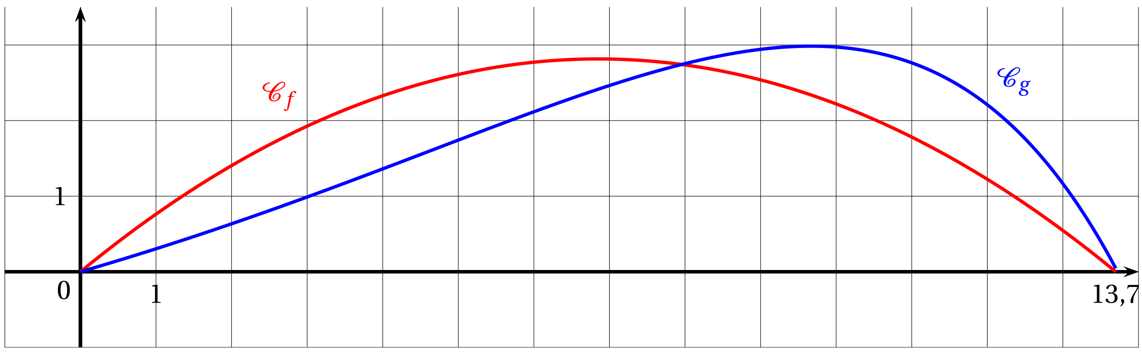
d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

La fonction g croit à partir de $g(0) = 2,2\mathrm{e}^0 - 2,2 = 2,2 - 2,2 = 0$ jusqu'à environ 2,98 et décroit ensuite jusqu'en moins l'infini.

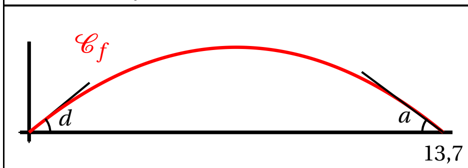
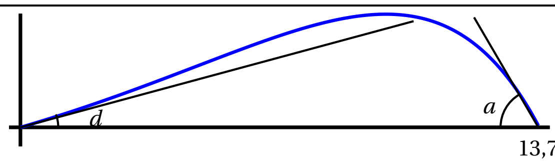
Sur l'intervalle $\left[\dfrac{29}{3}\,;\,+\infty\right[$ la fonction g est strictement décroissante, continue car dérivable sur cet intervalle; comme $0 \in]-\infty\,;\,2,98[$ il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.
On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en Partie A pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.
On admettra ici que 13,7 est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g.
On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle [0; 13,7].



Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0 < x < 13,7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond à environ 0,914 mètre).
On appelle « angle de décollage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.
De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}_f$ ou $\mathscr{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 13,7. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.
Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathscr{C}_f$	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathscr{C}_g$.
	

1. *Première modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

Selon ce modèle :

a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?
On a vu que le maximum de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est $f(6,85) = 0,06\left(-6,85^2 + 13,7 \times 6,85\right) = 2,81535 \approx 2,815$, soit en yards : $28,15$.

b. Vérifier que $f'(0) = 0,822$.
De $f'(x) = 0,06(-2x + 13,7)$ on déduit que $f'(0) = 0,06 \times 13,7 = 0,822$. Ce nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, donc
$f'(0) = \tan d = 0,822$.

c. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).
D'après le tableau donné (colonne I), on a donc $d \approx 39,42$.

d. Quelle propriété graphique de la courbe $\mathcal{C}_f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?
La courbe est une partie de parabole et celle-ci est symétrique autour de la droite d'équation $y = 6,85$: donc les angles de décollage et d'atterrissage sont égaux

2. *Seconde modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

Selon ce modèle :

a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?
On a vu que le maximum de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ est $g\left(\dfrac{29}{3}\right) \approx 2,98$.
La hauteur maximale de la balle est donc 29,8 (yards).
On précise que $g'(0) = 0,29$ et $g'(13,7) \approx -1,87$.

b. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).
Comme $g'(0) = 0,29$ comme dans le premier cas c'est aussi le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, donc $\tan d \approx 0,29$ et d'après le tableau $d \approx 16,2°$.

c. Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.
Par contre à l'atterrissage $g'(13,7) \approx -1,87$ donc $\tan a \approx 1,87$ d'où $a \approx 62°$.

Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connait sa tangente :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	$\tan(\theta)$	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	$\tan(\theta)$	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants :

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	32	52	137

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.
Au vu des observations sur les professionnels on remarque que :

- Le seul résultat confirmé est la distance horizontale 137 en yard ;
- L'angle décollage est surestimé avec la première modélisation et sous-estimé avec la seconde ;
- la hauteur maximale est sous-estimé dans les deux cas ;
- l'angle d'atterrissage est sous-estimé dans le premier cas et surestimé dans le second.

Conclusion : aucun des deux modèles n'est satisfaisant !