Corrigé du quiz de Mathématiques

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) Pour tout entier naturel n : $\quad u_n = \dfrac{1}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2}$

c) Pour tout entier naturel n : $\quad u_n \geq 0$

d) $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

Justification : Par utilisation de l'expression conjuguée, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} &= \frac{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2} \\ &= \frac{n^2-(n^2+1)}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2} = \frac{-1}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2} \end{aligned}$$

Par opérations sur les limites, on conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0} \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N} : u_n < 0.$$

---

2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = \dfrac{3-\sin n}{n^2+3}$. Sa limite est :

a) $\boxed{0}$

b) $+\infty$

c) 3

d) n'existe pas.

Justification : $\sin n$ n'admet pas de limite en $+\infty$. On pense donc à utiliser un théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes en partant de $-1 \leq \sin n \leq 1$.
En utilisant le fait que $n^2+3 > 0$ pour tout entier naturel n, on obtient que :

$$\frac{2}{n^2+3} \leq \frac{3-\sin n}{n^2+3} \leq \frac{4}{n^2+3}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^2+3} = 0.$
Donc, par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{3-\sin n}{n^2+3} = 0.}$$

---

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Une expression de sa dérivée f' est donnée par :

a) $\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

b) $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

c) $\boxed{\dfrac{-1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

d) $\dfrac{-1}{x^2}\mathrm{e}^{x}$.

Justification : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ où $u(x) = \dfrac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Or $u'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$. Par conséquent

$$\boxed{f'(x) = \frac{-1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.}$$

---

4. $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé.

On considère les points $A(-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ 0\ ;\ 2)$ et $C(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

a) Les points A, B et C sont alignés

b) $\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

d) $\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 2.}$

Justification : On a $\overrightarrow{AB}(-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Il n'existe aucun réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, $\boxed{\text{les points } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$.

Par ailleurs

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 2.}$$

---

5. $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé.

Soient $A(1\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et $B(-2\ ;\ 0\ ;\ 5)$ deux points de l'espace. On note I le milieu de $[AB]$.

a) $\boxed{I \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{-1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 4\right)}$

b) I a pour coordonnées $\left(\dfrac{-3}{2}\ ;\ \dfrac{-1}{2}\ ;\ 1\right)$

c) $\boxed{\text{La norme de } \overrightarrow{AI} \text{ est égale à } \frac{\sqrt{14}}{2}}$

d) La norme de $\overrightarrow{AI}$ est égale à $\dfrac{7}{2}$.

Justification : I est le milieu du segment $[AB]$, donc

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A+z_B}{2}\right).$$

Ainsi $\boxed{I\left(\frac{-1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 4\right)}$ et $\overrightarrow{AI}\left(\frac{-3}{2}\ ;\ \frac{-1}{2}\ ;\ 1\right)$. Alors

$$\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2+1^2} = \sqrt{\frac{9+1+4}{4}}.$$

Par conséquent

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = \frac{\sqrt{14}}{2}.}$$

---

6. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

b) L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de f.

c) $\boxed{f'(x) = \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}}$

d) f est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Justification : Par le théorème des croissances comparées : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.}$

D'autre part $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$. Donc l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de f.
La fonction f est dérivable et pour tout $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \boxed{\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}.}$$

Enfin, le signe de $f(x)$ est celui de $x-1$ donc pour tout $x \geq 1$, $f'(x) \geq 0$. Donc

f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

---

7. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-4x} - 3x + 2$.

a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

b) $\boxed{f'(x) = -4\mathrm{e}^{-4x} - 3}$

c) $f''(x) = -4\mathrm{e}^{-4x}$

d) f est concave sur $\mathbb{R}$.

Justification : Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-4x} = 0$. Donc par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.}$$

Par ailleurs la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\boxed{f'(x) = -4\mathrm{e}^{-4x} - 3} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 16\mathrm{e}^{-4x}.$$

Comme $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

---

8. La limite de $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ en 4 est :

a) 4

b) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{2}$.

Justification : Pour $x \neq 4$, on a par identité remarquable :

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

Or

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 4} 2 = 2 \end{array}\right. \quad \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to 4} \left(\sqrt{x}+2\right) = 2+2 = 4.$$

On conclut par quotient que $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{4}$. Autrement dit

$$\boxed{\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}.}$$

---

9. $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé. On considère les droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(4\,;\ 2\,;\ -6)$ et $\vec{v}(-2\,;\ -1\,;\ 3)$.

a) $\boxed{\text{Les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}}$

b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

c) $\boxed{\text{Les droites } d \text{ et } d' \text{ sont parallèles}}$

d) Les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Justification : $\vec{u}(4\ ;\ 2\ ;\ -6)$ et $\vec{v}(-2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ donc $\vec{u} = -2\vec{v}$.
Il s'ensuit que

$$\boxed{\text{les veteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{les droites } d \text{ et } d' \text{ sont parallèles.}}$$

---

10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{4x^2+3}}{x}$.

La limite de f en $-\infty$ est égale à :

a) 3
b) $-\infty$
c) $+\infty$
d) $\boxed{-3}$

Justification : Pour $x < 0$, on a :

$$\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{4x^2+3}}{x} = \frac{|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)}{x} = -\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)$$

car $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ pour $x < 0$. Or

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{4+\frac{3}{x^2}} = \sqrt{4} = 2.$$

Par opérations sur les limites, on conclut que :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{4x^2+3}}{x} = -3.}$$
