Corrigé du bac général 2021
Spécialité Mathématiques – Zéro-1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021 – sujet 0

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

1. Réponse B

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 1$

On applique le théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement) et on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 1$

2. Réponse C

On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$

Avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$

Et $v(x) = e^{x^2}$ donc $v'(x) = 2xe^{x^2}$

Par conséquent, $f'(x) = 1 \times e^{x^2} + x \times 2xe^{x^2} = e^{x^2}(1 + 2x^2)$

3. Réponse C

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

4. Réponse C

On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle [0 ; 1].

5. Réponse C

La fonction g' est croissante sur l'intervalle [1 ; 2], donc g'' est positive et donc la fonction g est convexe sur [1 ; 2].

Attention le graphique de l'énoncé n'est pas g mais g'.

EXERCICE 2 (5 points)

1.a. Par lecture graphique, on obtient $I(0{,}5\,;0\,;1)$ et $J(2\,;0\,;1)$.

1.b. Par lecture graphique, on a aussi $D(0\,;1\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$ et $G(1\,;1\,;1)$.

Par conséquent $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} 2-0=2 \\ 0-1=\ -1 \\ 1-0=1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} 0{,}5-1=-0{,}5 \\ 0-0=0 \\ 1-0=1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 1-1=0 \\ 1-0=1 \\ 1-0=1 \end{pmatrix}$.

1.c. On peut montrer que $\overrightarrow{DJ}$ et perpendiculaire à deux vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ du plan (BGI) qui sont non-colinéaires.

$$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BI} = 2 \times (-0{,}5) + (-1) \times 0 + 1 \times 1 = 0$$

$$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BG} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0$$

$\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), car il est orthogonal à deux vecteur $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ qui sont non-colinéaires.

1.d. On sait que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), donc une équation cartésienne de ce plan est :

$$2x + (-1)y + 1z + d = 0$$

$$2x - y + z + d = 0$$

On utilise les coordonnées du point B (qui appartient au plan BGI) pour trouver la valeur de d.

$$2 \times 1 - 0 + 0 + d = 0$$

$$2 + d = 0$$

$$d = -2$$

On trouve bien l'équation cartésienne : $2x - y + z - 2 = 0$

2.a. Par lecture graphique, on obtient $F(1; 0; 1)$. Puisque la droite d est orthogonal au plan (BGI), un vecteur directeur de la droite d sera $\overrightarrow{DJ}$ qui est un vecteur normal au plan (BGI).

Ainsi on obtient : $\begin{cases} x = 1 + 2t = 1 + 2t \\ y = 0 + (-1)t = -t \\ z = 1 + 1t = 1 + t \end{cases}$

2.b. Pour vérifier que le point L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI) on vérifie que les coordonnées du point L valident les équations de la droite et du plan.

On remplace les valeurs de x y et z de la droite dans l'équation cartésienne du plan :

$$2(1 + 2t) - (-t) + 1 + t - 2 = 0$$

$$2 + 4t + t + 1 + t - 2 = 0$$

$$6t + 1 = 0$$

$$t = -\frac{1}{6}$$

On retrouve bien les coordonnées du point L : $\begin{cases} x = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} \\ y = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \\ z = 1 + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} \end{cases}$

3.a. La base de la pyramide peut être n'importe quelle face de la pyramide. Nous choisissions FBG comme base, et le segment (IF) comme hauteur.

Le triangle FBG est rectangle en F, donc l'aire FBG = $\frac{1\times1}{2}=\frac{1}{2}$

Par ailleurs, $IF=\frac{1}{2}$

Par conséquent, le volume $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

3.b. Si on prend BGI comme base, alors la hauteur de la pyramide sera (FL). Calculons cette hauteur : $(FL)=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{5}{6}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{1}{\sqrt{6}}$

On remplace dans la formule du volume de la pyramide :

$$V=\frac{1}{3}\times B\times h$$

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\times B\times\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$B=\frac{3\sqrt{6}}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

EXERCICE 3 (5 points)

1. On réalise les calculs nécessaires pour renseigner l'arbre pondéré.

$$P(A)=\frac{75}{300}=\frac{1}{4}$$

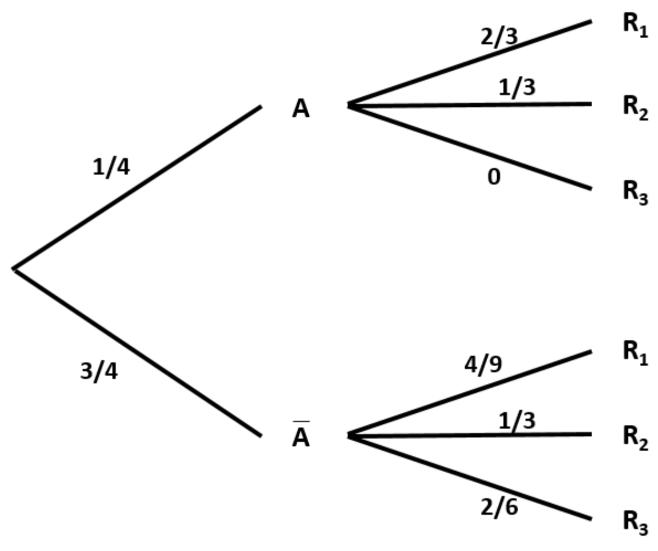
$$P_A(R_1)=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$$

$$P(\overline{A})=\frac{3}{4}$$

$$P_{\overline{A}}(R_1)=\frac{100}{255}=\frac{4}{9}$$

$$P_{\overline{A}}(R_2)=\frac{75}{225}=\frac{1}{3}$$

$$P_{\overline{A}}(R_3)=\frac{50}{225}=\frac{2}{9}$$



2.a. $P(A \cap R_2) = P(A) \times P_A(R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

2.b. On utilise la formule des probabilités totales pour trouver $P(R_2)$.

$$P(R_2) = P(A \cap R_2) + P(\overline{A} \cap R_2) = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2.c. On cherche $P_{R_2}(A) = \frac{P(R_2 \cap A)}{P(R_2)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$

3.a. On sait que la variable aléatoire X peut prendre la valeur 1 pour R_1, 2 pour R_2 et 3 pour R_3.

Ainsi, on réalise les calculs nécessaires :

$P(X = 1) = P(R_1) = P(A \cap R_1) + P(\overline{A} \cap R_1) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = P(R_2) = \frac{1}{3}$

$P(X = 3) = P(R_3) = P(\overline{A} \cap R_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{6}$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
p_i	1/2	1/3	1/6

On vérifie que l'on a bien $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. C'est bon !

3.b. Pour calculer l'espérance, on fait la somme des $p_i \times x_i$

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$$

Cela veut dire, qu'en moyenne, un candidat se présente 1,67 fois à l'examen pour réussir.

4.a. On sait que $P(R_3) = \frac{1}{6}$ donc $P(\overline{R_3}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

C'est la probabilité de l'évènement (R_1 ou R_2), c'est-à-dire la probabilité qu'une personne réussisse l'examen à la première ou deuxième tentative.

La probabilité que n personnes réussissent l'examen à la première ou deuxième tentative est donc $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Ainsi, la probabilité $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ est l'événement contraire. C'est-à-dire au moins une personne n'a pas réussi l'examen à la première ou deuxième tentative. C'est-à-dire au moins une personne a réussi l'examen à la troisième tentative.

4.b. En utilisant la commande seuil(0,9), cela revient à chercher la première valeur n pour laquelle $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est supérieur à 0,9. On résout l'inéquation :

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9$$

$$0{,}1 > \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\ln(0{,}1) > \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$$

$$\ln(0{,}1) > n \times \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} < n$$

$$12{,}6 < n$$

La fonction Python renvoie donc la valeur 13.

Cela signifie qu'il faut choisir au moins 13 personnes parmi les 300 personnes du groupe, afin d'être sûr que la probabilité d'avoir au moins un candidat faisant 3 tentatives pour réussir, soit supérieur à 0,9.

EXERCICE au choix A (5 points)

Partie I

1. Par lecture graphique, on comprend que le point A est le point d'abscisse 1/e, et le point B est le point d'abscisse 1.

On sait que la valeur de la dérivée correspond au coefficient directeur de la tangente.

Au point A d'abscisse 1/e, la tangente T_A est horizontale, donc le coefficient directeur est nul. On a donc : $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$

Au point B d'abscisse 1, la tangente T_B a un coefficient directeur de -1 (par lecture graphique). On a donc : $f'(1) = -1$

2. L'ordonnée à l'origine de la droite T_B est 3, et son coefficient directeur est -1. Par conséquent, une équation de la droite T_B est $y = -x + 3$

Partie II

1. $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{1/e} = \frac{2+(\ln(1)-\ln(e))}{1/e} = \frac{2+0-1}{1/e} = \frac{1}{1/e} = e$

Donc la courbe C_f passe bien par le point A.

$f(1) = \frac{(2+\ln(1))}{1} = \frac{2}{1} = 2$

Donc la courbe C_f passe bien par le point B.

On cherche ensuite le point où C_f coupe l'axe des abscisses.

$$\frac{2+\ln(x)}{x} = 0$$

$$2+\ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = -2$$

$$x = e^{-2}$$

2. Pour le calcul en 0⁺, on sait que $\lim_{x\to 0^+}(2+\ln(x)) = -\infty$

Et que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \times +\infty = -\infty$

Pour le calcul en $+\infty$, on sait que $\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0$

Et que $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$

3. On peut utiliser la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec $u = 2 + \ln(x)$ donc $u' = 1/x$

Et $v = x$ donc $v' = 1$

Ainsi, on obtient : $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\times x-(2+\ln(x))\times 1}{x^2} = \frac{1-2-\ln(x)}{x^2} = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}$

4. On résout l'équation :

$$-1-\ln(x) = 0$$

$$-1 = \ln(x)$$

$$x = \frac{1}{e}$$

Le tableau de signe de f est donc :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5. Pour trouver les intervalles sur lesquelles la fonction f est convexe, on cherche les intervalles sur lesquelles la fonction f'' est positive.

Puisque le dénominateur x^3 est toujours positif sur $]0\,;+\infty[$ alors :

$$f''(x) \geq 0$$

$$\frac{1+2\ln(x)}{x^3} \geq 0$$

$$1+2\ln(x) \geq 0$$

$$\ln(x) \geq -\frac{1}{2}$$

$$x \geq e^{-1/2}$$

Le plus grand intervalle sur lequel $f$est convexe est donc $[e^{-1/2}; +\infty[$.

EXERCICE au choix B (5 points)

1.a. $f(0)$ correspond à la température en sortie de four, c'est-à-dire $f(0) = 225$.

1.b. $y' + 6y = 150 \iff y' = -6y + 150$

On reconnait une équation de la forme $y' = ay + b$ dont on connait la forme des solutions.

Ainsi, les solutions seront : $f(t) = -\frac{b}{a} + Ce^{at}$

$$f(t) = -\frac{150}{-6} + Ce^{-6t}$$

$$f(t) = 25 + Ce^{-6t}$$

1.c. En utilisant la condition initiale $f(0) = 225$, on obtient l'équation suivante pour trouver la valeur de C :

$$25 + Ce^{-6\times 0} = 225$$

$$25 + C = 225$$

$$C = 200$$

On trouve bien $f(t) = 200\, e^{-6t} + 25$

2. On va vérifier que la fonction f est bien décroissante en cherchant le signe de la dérivée.

$$f'(t) = 200 \times (-6)\, e^{-6t} = -1200\, e^{-6t}$$

$f'(t)$ est négative pour tout t, donc $f(t)$ est bien décroissante.

On va ensuite vérifier que la fonction f se stabilise à la température ambiante en calculant sa limite à $+\infty$.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} 200\, e^{-6t} + 25 = \lim_{t \to +\infty} 0 + 25 = 25$$

La fonction f fournit un modèle en accord avec les observations, avec une température qui baisse et qui se stabilise à 25°C.

3. On sait que la fonction $f(t)$ est continue et strictement décroissante sur [0 ; +∞[.

Or $f(0) = 225$

Et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25$

Par conséquent, l'application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(t) = 40$ possède une unique solution sur l'intervalle [0 ; +∞[.

4. Par lecture graphique, on a $T_0 \approx 0{,}42\ heure$, c'est-à-dire $0{,}42 \times 60 = 25{,}2\ minutes$.

Nous considérons la valeur arrondie en nombre entier à 25 minutes.

5.a. Il suffit de calculer $D_0 = f\left(\frac{0}{60}\right) - f\left(\frac{0+1}{60}\right) = f(0) - f\left(\frac{1}{60}\right) \approx 19$

Cela veut dire qu'une minute après la sortie du four, la température de la baguette a baissé de 19°C.

5.b.
$$D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - \frac{f(n+1)}{60}$$

$$D_n = 200\, e^{-6\times\left(\frac{n}{60}\right)} + 25 - \left(200 e^{\,-6\times\left(\frac{n+1}{60}\right)} + 25\right)$$

$$D_n = 200\, e^{-0{,}1n} - 200\, e^{-0{,}1n-0{,}1}$$

$$D_n = 200\, e^{-0{,}1n} \times (1 - e^{-0{,}1})$$

Pour déterminer le sens de variation de D_n, on étudie le signe de $\frac{D_{n+1}}{D_n}$.

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{200\, e^{-0{,}1(n+1)} \times (1 - e^{-0{,}1})}{200\, e^{-0{,}1n} \times (1 - e^{-0{,}1})}$$

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{e^{-0{,}1(n+1)}}{e^{-0{,}1n}} = \frac{e^{-0{,}1n} \times e^{-0{,}1}}{e^{-0{,}1n}}$$

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} = e^{-0{,}1} < 1$$

Donc D_n est décroissante.

Par ailleurs $\lim_{n \to +\infty} e^{-0{,}1n} = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} D_n = 0$

Cela signifie que la diminution de la température baisse avec le temps jusqu'à devenir nulle. Ce comportement est cohérent avec les précédentes réponses et notre bon sens, puisque la température de la baguette baisse très vite en sortie du four, puis de moins en moins vite jusqu'à atteindre et se stabiliser à 25°C.