

DEVOIR LIBRE n° 5

L'usage de calculatrices est interdit pour l'ensemble des problèmes de ce devoir.

PREMIER PROBLEME : Les ondes gravitationnelles (d'après banque PT 2020)

L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.

Le barème de ce problème correspondait à 30 % d'une épreuve de 4h.

Données : Constantes universelles :

- Constante de la gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
- Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Permittivité électrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Une onde gravitationnelle est une oscillation de la courbure de l'espace-temps qui se propage à grande distance de son point de formation. Albert Einstein a prédit l'existence de telles ondes en 1916 : selon sa théorie de la relativité générale, de même que les ondes électromagnétiques (lumière, ondes radio, rayons X, etc.) sont produites par les particules chargées accélérées, les ondes gravitationnelles sont produites par des masses accélérées et ces ondes se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide. Cependant, ce n'est qu'en 2016, que la confirmation directe des ondes gravitationnelles a été possible grâce à une première observation faite le 14 septembre 2015. Cette observation ouvre un champ nouveau d'observation de l'univers à grande échelle. Depuis, plusieurs autres observations directes d'ondes gravitationnelles résultant de la coalescence de deux astres ont été réalisées. Elles n'ont été possibles que grâce aux détecteurs interférométriques qui permettent de détecter un déplacement minimal de $\pm 2 \times 10^{-18} \text{ m}$.

Nous nous proposons dans ce sujet de modéliser les événements astronomiques à l'origine de ces ondes.

On se propose de dégager certaines caractéristiques des ondes gravitationnelles produites lors de la fusion de deux corps en interaction gravitationnelle. Les corps envisagés sont des trous noirs ou deux étoiles à neutrons. Bien que leur description relève de la relativité générale, on se contente, dans ce sujet, d'une approche gravitationnelle newtonienne sur laquelle on greffera certains résultats de relativité générale pour rendre compte de manière approchée des faits expérimentaux.

A) Préliminaires.

- 1) Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 disposées respectivement aux points P_1 et P_2 . Rappeler l'expression de la force que q_1 exerce sur q_2 . On introduira toutes les notations nécessaires.
- 2) Enoncer le théorème de Gauss de l'électrostatique.
- 3) On considère maintenant deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en P_1 et P_2 . Exprimer la force de m_1 sur m_2 .
- 4) Etablir une correspondance explicite entre l'électrostatique et la gravitation. Enoncer le théorème de Gauss gravitationnel. On notera $\vec{g}(M)$ le champ gravitationnel au point M.
- 5) On envisage un astre sphérique de centre O, de rayon R et de masse m uniformément répartie. En justifiant clairement chaque étape du raisonnement, établir que le champ gravitationnel créé par cet astre en un point M extérieur à l'astre s'écrit $\vec{g}(M) = -\frac{G m}{OM^3} \overrightarrow{OM}$. Commenter cette expression.
- 6) Etablir également l'expression de $\vec{g}(M)$ pour un point M intérieur à l'astre.
- 7) Tracer alors l'allure de $\|\vec{g}(M)\|$ en fonction de r pour tout r.

B) Description mécanique du système.

On envisage deux corps identiques C_1 et C_2 de masse m, assimilables en première approximation à des points matériels. L'ensemble forme un système isolé. On note C leur centre de masse (ou centre d'inertie). On travaille dans un référentiel galiléen de centre C.

On note $\vec{R}_1 = \overrightarrow{CC_1}$ (de norme R_1), $\vec{R}_2 = \overrightarrow{CC_2}$ (de norme R_2) et $\vec{r} = \overrightarrow{C_1C_2}$ (de norme r).

On désigne par \vec{u}_r le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \frac{\vec{R}_1}{R_1}$.

8) A partir de la définition de C, montrer que $\vec{R}_1 = -\frac{1}{2} \vec{r}$.

9) Justifier que le mouvement de C_1 est plan.

On se place dans toute cette partie B dans le cas où r est une constante.

10) En déduire que le mouvement de C_1 est uniforme.

11) Décrire le mouvement de C_1 . Faire un schéma où sont représentés, à un instant donné, C, C_1 et C_2 ainsi que leurs vecteurs vitesse respectifs.

12) Le mouvement de C_1 est périodique de fréquence f. Etablir la relation $f = \sqrt{\frac{G m}{2 \pi^2 r^3}}$.

13) Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle E_{pot} de C_2 dans le champ gravitationnel créé par C_1 en fonction de G, m et r. On choisira E_{pot} nulle pour r tendant vers l'infini.

L'énergie mécanique totale E_m du système $\{C_1 + C_2\}$ s'obtient en sommant les énergies cinétiques des deux corps et l'énergie potentielle précédente.

- 14) Par une méthode de votre choix, montrer que l'énergie cinétique de C_1 peut s'écrire : $E_{c1} = \frac{G m^2}{4 r}$.
- 15) En déduire une expression de E_m en fonction de G , m et r seuls. Cette énergie mécanique est une constante du mouvement : expliquer pourquoi.
- 16) En déduire que l'on a $E_m = -\alpha f^{2/3}$ où $\alpha = \left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}$. Vérifier explicitement l'homogénéité de l'expression précédente.

C) Prise en compte de l'émission d'ondes gravitationnelles.

On montre en relativité générale, que du fait du mouvement relatif, le système $\{C_1 + C_2\}$ perd de l'énergie mécanique au cours du temps par émission d'ondes gravitationnelles avec une puissance instantanée $P(t) = \frac{64}{5} \frac{G^4 m^5}{c^5 r(t)^5}$ où $r(t)$ est la distance $C_1 C_2$ à l'instant t . On admet que cette perte d'énergie reste suffisamment faible sur une période pour pouvoir utiliser les différentes relations établies dans la partie B en première approximation.

- 17) Expliquer qualitativement comment évoluent $r(t)$ et $f(t)$ au cours du temps du fait de l'émission d'ondes gravitationnelles.
- 18) Etablir que la fréquence f du mouvement satisfait l'équation différentielle $\frac{df}{dt} = K f^\beta$ où K est une constante numérique que l'on ne cherchera pas à calculer et où β est une constante numérique que l'on précisera.

On note f_0 la fréquence du mouvement relatif des deux étoiles à l'instant pris comme origine des dates.

- 19) En procédant à une séparation des variables, intégrer l'équation différentielle précédente et montrer que l'on a $f(t) = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{3/8}}$ où τ est un temps caractéristique à exprimer en fonction de f_0 et K .

- 20) Donner une interprétation physique de τ .

DEUXIEME PROBLEME : Etude d'un microphone (d'après banque PT 2020)

L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.

Le barème de ce problème correspondait à 40 % d'une épreuve de 4h (c'est la partie modélisation de l'épreuve d' « Informatique et Modélisation de Systèmes Physiques »).

Un microphone doit permettre de capter le son avec une grande sensibilité pour enregistrer les ondes, notamment les plus faibles en amplitude. Un microphone doit également pouvoir capter les ondes sonores selon toutes les directions. Ces deux critères nous conduisent à choisir un microphone électroacoustique plutôt qu'un microphone électrodynamique. Nous allons donc dans ce problème nous intéresser au fonctionnement d'un microphone électroacoustique.

Un microphone est un transducteur électroacoustique, c'est-à-dire un appareil capable de convertir un signal acoustique en signal électrique.

Parmi les différentes technologies utilisées, deux sont les plus fréquentes :

- les microphones électrodynamiques, qui exploitent le courant induit créé par le déplacement d'une bobine (liée à la membrane) dans un champ magnétique,
- les microphones électroacoustiques, pour lesquels l'onde de pression fait vibrer une membrane, qui constitue l'armature d'un condensateur.

Pour modéliser un microphone électroacoustique, nous nous intéressons pour commencer à un condensateur plan, dont une des armatures est mobile. Nous étudierons ensuite l'intégration de ce condensateur dans un circuit RLC, avant d'observer la réponse de ce circuit en régime sinusoïdal forcé.

LE CONDENSATEUR PLAN (20 % du barème d'une épreuve de 4h)

Un condensateur plan est formé de deux armatures, modélisées par deux plans uniformément chargés, séparés par une distance e .

Une plaque dans le plan (Oyz) , uniformément chargée avec une densité surfacique σ , crée au point $M(x,y,z)$ un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ tel que :

- pour $x < 0$, $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x$
- pour $x > 0$, $\vec{E}(M) = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x$

Les effets de bord sont négligés.

Q1. Déterminer et présenter sous forme d'un schéma le champ électrostatique créé, en tout point de l'espace, par un condensateur plan constitué de deux plaques placées en $x = 0$ (charge surfacique $-\sigma$) et en $x = e$ (charge surfacique $+\sigma$).

Q2. En déduire le potentiel $V(x)$ en tout point de l'espace, et représenter graphiquement ce potentiel (on considère l'origine des potentiels : $V(x = 0) = 0$).

La surface des plaques du condensateur plan est notée S et les charges électriques portées par les plaques sont respectivement $-Q$ (plaque en $x = 0$) et $+Q$ (plaque en $x = e$).

Q3. Calculer la tension U entre les deux plaques, en fonction de σ , e et ε_0 .

Q4. Déterminer la capacité du condensateur plan, en fonction de e , S et ϵ_0 .

Q5. Calculer l'ordre de grandeur de la capacité d'un condensateur utilisé dans un microphone électrostatique, avec $e \approx 10 \mu\text{m}$, $S \approx 1 \text{ cm}^2$ et $\epsilon_0 \approx 10^{-11} \text{ USI}$.

Q6. Exprimer la densité volumique w_e d'énergie électrique dans le condensateur, puis en déduire l'énergie électrique E_e emmagasinée dans un condensateur soumis à une tension U en fonction de e , S , ϵ_0 et Q .

Donnée non fournie par l'énoncé original, mais nous ne sommes pas assez avancés en cours :

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

Une force $\vec{f} = f \vec{u}_x$ est exercée sur la plaque en $x = e$, ce qui entraîne un déplacement (sans variation d'énergie cinétique) : l'écartement passe de e à $e + \Delta x$.

Q7. Déterminer la variation d'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur, sachant que la charge des armatures n'est pas modifiée.

Q8. On peut considérer que cette variation d'énergie correspond au travail de la force \vec{f} , déterminer la norme de cette force, en fonction de ϵ_0 , Q et S .

Q9. En déduire la force \vec{f}_{el} exercée par l'armature en $x = 0$ sur celle en $x = e$, qui permet de maintenir celle-ci à l'équilibre.

CIRCUIT ELECTRIQUE (10 % du barème d'une épreuve de 4h)

Le condensateur étudié est désormais utilisé dans un microphone. L'armature placée en $x = 0$ (charge $-Q$) est fixe, alors que celle en $x = e$ (charge $+Q$) peut subir un déplacement Δx , avec $\Delta x \ll e$, en raison de la surpression $p(t)$ due à une onde acoustique.

Plus précisément,

- en l'absence d'onde acoustique : la pression est P_{atm} et l'armature est en $x = e$;
- avec une onde : $P = P_{atm} + p$, avec $p \ll P_{atm}$ et l'armature est en $x = e + \Delta x$.

Ce déplacement de l'armature induit une charge supplémentaire. Ainsi : $Q = Q_0 + q$, avec $q \ll Q_0$, où Q_0 est la charge statique (pour $x = e$ et $P = P_{atm}$).

Q10. Montrer que la force \vec{f}_{el} de la question précédente peut s'écrire $\vec{f}_{el}(t) = \vec{f}_{el0} \left(1 + 2 \frac{q}{Q_0} \right)$, où \vec{f}_{el0} est la force électrique en l'absence de perturbation, soit $Q = Q_0$.

Le condensateur est un des composants d'un circuit RLC série, alimenté par une source de tension de force électromotrice U_0 et parcouru par un courant d'intensité i .

Q11. Exprimer la tension u_C aux bornes du condensateur, en fonction de Q_0 , q , C_0 , Δx et e , où C_0 est la capacité du condensateur statique, et la simplifier en ne conservant que les termes d'ordre 1 en $\frac{q}{Q_0}$ et

$$\frac{\Delta x}{e}.$$

Q12. Etablir l'équation électrique du circuit RLC série, pour lier $R, L, C_0, U_0, Q_0, e, \Delta x, q, \frac{dq}{dt}$ et $\frac{d^2q}{dt^2}$ et la simplifier sachant qu'on choisit la force électromotrice telle que $U_0 = \frac{Q_0}{C_0}$.

La composante statique \vec{f}_{e10} est compensée par un dispositif, on ne considère dans la suite que la composante variable : $2 \frac{q}{Q_0} \vec{f}_{e10}$.

L'armature est aussi soumise à la force de pression \vec{f}_{press} , à une force de rappel élastique $\vec{T} = -k \Delta x \vec{u}_x$ et à une force d'amortissement $\vec{f}_{am} = -\lambda \frac{d(\Delta x)}{dt} \vec{u}_x$.

Q13. Exprimer la force \vec{f}_{press} qui s'exerce sur l'armature mobile, en considérant que la pression est P_{am} dans le condensateur, et P à l'extérieur.

Q14. Ecrire l'équation mécanique qui régit l'évolution de la position de l'armature mobile, de masse m .

REPONSE AU REGIME SINUSOÏDAL FORCE (10 % du barème d'une épreuve de 4h)

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω pour étudier la réponse du microphone à une onde acoustique. p, q et Δx sont des fonctions sinusoïdales du temps à la pulsation ω . On notera \underline{s} la grandeur complexe associée au signal s .

Q15. Justifier l'intérêt d'étudier la réponse à une excitation sinusoïdale.

Q16. Réécrire l'équation électrique et l'équation mécanique en notation complexe, pour obtenir deux équations linéaires qui lient $\underline{q}, \underline{\Delta x}$ et \underline{p} .

Q17. En déduire une équation entre \underline{q} et \underline{p} , sous la forme $\underline{A} \underline{q} = \frac{\underline{p}}{\underline{Z}}$ où $\underline{A} = \frac{j \omega C_0 e}{Q_0 S} (-m \omega^2 + j \lambda \omega + k)$.

L'impédance \underline{Z} peut s'écrire $\underline{Z} = \underline{Z}_0 + \underline{Z}_m$, où $\underline{Z}_0 = R + j \left(L \omega - \frac{1}{C_0 \omega} \right)$ est l'impédance statique et \underline{Z}_m l'impédance motionnelle.

Q18. Montrer que l'impédance motionnelle $\underline{Z}_m = \frac{Q_0^2}{C_0^2 e^2 \omega^2} \frac{1}{\left(j m \omega + \lambda + \frac{k}{j \omega} \right)}$ correspond à l'impédance

d'un dipôle $R_m L_m C_m$ en parallèle, et exprimer R_m, L_m et C_m en fonction de $m, k, \lambda, e, C_0, Q_0$ et ω .

Q19. Comment peut-on faire pour « visualiser » à l'oscilloscope l'intensité $i(t)$, image de la surpression $p(t)$ due à l'onde acoustique ?

TROISIEME PROBLEME : Electrostatique

L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.

Les valeurs numériques demandées seront exprimées avec un seul chiffre significatif.

Toutes les figures sont rassemblées en fin de problème.

PARTIE I : Conducteur cylindrique

Dans le vide, de permittivité ϵ_0 , un conducteur cylindrique plein qui sera désigné dans la suite par conducteur (1), de révolution autour de l'axe vertical Oz, de rayon R_1 , de longueur L quasi-infinie devant R_1 , porte sur sa surface une répartition uniforme de charges électriques positives, de densité surfacique (charge par unité de surface) $+\sigma_1$.

On veut calculer le champ électrostatique \vec{E} en un point M situé à la distance r de l'axe Oz, en utilisant le théorème de Gauss.

I-1) Enoncer le théorème de Gauss pour le champ électrique créé par un ensemble de charges électriques au repos.

I-2) Exprimer la charge Q_1 portée par une longueur ℓ du conducteur (1) en fonction de R_1 , σ_1 et ℓ .

I-3) Quelle est, par raison de symétrie, la direction du champ \vec{E} en M, et de quelle(s) variable(s) de position son module dépend-il a priori ?

I-4) Exprimer le flux de \vec{E} à travers une surface S fermée en forme de cylindre de révolution autour de l'axe Oz, de rayon r et de hauteur ℓ , en fonction de r, ℓ et de E_r , composante radiale du champ \vec{E} .

I-5) Dédurre du théorème de Gauss l'expression de E_r en fonction de Q_1 , ℓ , r et ϵ_0 dans les deux cas suivants :

I-5-a) pour $r > R_1$.

I-5-b) pour $r < R_1$.

PARTIE II : Condensateur cylindrique

Le conducteur (1) précédent est maintenant entouré d'un deuxième conducteur cylindrique creux désigné ci-après par conducteur (2), de même axe de révolution Oz, de rayon intérieur $R_2 > R_1$ et lui aussi de longueur L quasi-infinie devant R_2 (figure 1).

Le conducteur (2) porte sur sa surface intérieure une densité surfacique de charges électriques σ_2 uniforme, tandis que le conducteur (1) reste chargé comme précédemment.

II-1) Le champ \vec{E} de la question I-5 est-il modifié dans les cas suivants :

II-1-a) pour $r < R_2$?

II-1-b) pour $r > R_2$?

Exprimer le champ \vec{E} dans chacune des zones de l'espace.

II-2) On appelle γ la conductivité du conducteur (2). Sachant que le conducteur (2) est à l'équilibre électrostatique, c'est-à-dire qu'il n'est parcouru par aucun courant électrique ($\vec{j} = \vec{0}$), que vaut le champ \vec{E} pour $r > R_2$?

Donnée non fournie par l'énoncé original, mais nous ne sommes pas assez avancés en cours : on rappelle la loi d'Ohm locale dans un conducteur : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

II-3) En déduire l'expression de la charge Q_2 portée par une hauteur ℓ de la surface intérieure du conducteur (2), en fonction de Q_1 calculé à la question I-2.

II-4) En utilisant les relations entre le potentiel et le champ électrostatique, exprimer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les deux conducteurs cylindriques en fonction de ϵ_0 , Q_1 , ℓ , R_1 et R_2 .

II-5) En déduire l'expression de la capacité C du condensateur cylindrique ainsi formé, pour une hauteur ℓ des conducteurs (1) et (2), en fonction de ϵ_0 , ℓ , R_1 et R_2 .

II-6) On appelle $\Gamma = C / \ell$ la capacité par unité de longueur de ce condensateur cylindrique. Calculer numériquement Γ pour $R_1 = 1$ cm et $R_2 = 5$ cm, sachant que $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹ et $\ln 5 \approx 1,6$.

PARTIE III : Electromètre cylindrique

Le conducteur (1) de longueur totale ℓ est maintenant partiellement sorti du conducteur (2) de même longueur, tout en lui restant coaxial (figure 2).

III-1) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p emmagasinée dans un condensateur chargé, en fonction de sa charge Q_1 et de sa capacité C .

III-2) En supposant la charge Q_1 fixée, exprimer la variation élémentaire d'énergie potentielle dE_p au cours d'un déplacement $d\ell$ du conducteur (1) vers le bas. En déduire l'expression du travail élémentaire δW de la résultante axiale \vec{F}_1 des forces électrostatiques qui s'exercent sur le conducteur (1) mobile, en fonction de $V_1 - V_2$, Γ et $d\ell$.

III-3) Donner l'expression de F_{1z} , composante verticale de \vec{F}_1 en fonction de la capacité par unité de longueur Γ et de la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les armatures.

III-4) On veut faire une mesure de cette différence de potentiel $V_1 - V_2$ en mesurant directement F_{1z} à l'aide d'une balance de précision au plateau de laquelle on suspend le conducteur (1). Le montage ainsi réalisé s'appelle un électromètre cylindrique (figure 2). On constate que pour compenser l'effet de la force \vec{F}_1 , il faut retirer une masse Δm du plateau de la balance. En déduire l'expression de $V_1 - V_2$ en fonction de Δm , Γ et de l'accélération g de la pesanteur.

III-5) Calculer numériquement $V_1 - V_2$ pour $\Delta m = 0,1$ g, sachant que $g = 10$ m.s⁻² (Γ a été calculé précédemment, à la question II-6).

III-6) Discuter la possibilité de mesurer des différences de potentiel alternatives à l'aide du montage précédent.

PARTIE IV : Montage hétéro-statique symétrique

On veut maintenant rendre linéaire la réponse de l'électromètre et pouvoir agir sur sa sensibilité lors de la mesure d'une tension continue u .

Pour cela, on réalise un montage dans lequel deux cylindres creux identiques au conducteur (2) sont alignés sur un même axe Oz, tandis que le conducteur (1) coaxial aux deux autres, toujours suspendu au plateau de la balance, pénètre en partie dans chacun d'eux (figure 3).

Une source auxiliaire de tension continue V à point milieu relié à la terre (choisie comme potentiel 0 de référence), permet de porter le cylindre supérieur au potentiel $+V/2$ et le cylindre inférieur au potentiel $-V/2$. Le conducteur (1) est porté au potentiel u à mesurer.

IV-1) Montrer que u est maintenant proportionnel à Δm , et que la sensibilité de la mesure dépend de la tension auxiliaire V .

IV-2) Calculer numériquement u pour $\Delta m = 1 \text{ mg}$, si $V = 1.10^3 \text{ volts}$.

PARTIE V : Dipôle équivalent à un condensateur

Dans le montage schématisé par la figure 4, les deux amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont idéaux.

V-1) Pourquoi les deux amplificateurs linéaires intégrés idéaux fonctionnent-ils en régime linéaire dans ce montage ?

V-2) On se place en régime sinusoïdal de pulsation ω .

V-2-a) Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}_e}{\underline{i}_e}$ du dipôle ainsi constitué entre les deux points A et B.

V-2-b) Montrer que ce dipôle est équivalent à un condensateur de capacité C_e dont on donnera l'expression en fonction de C , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 .

V-2-c) Quel est l'intérêt de ce dispositif ? Proposer une application numérique réalisable.

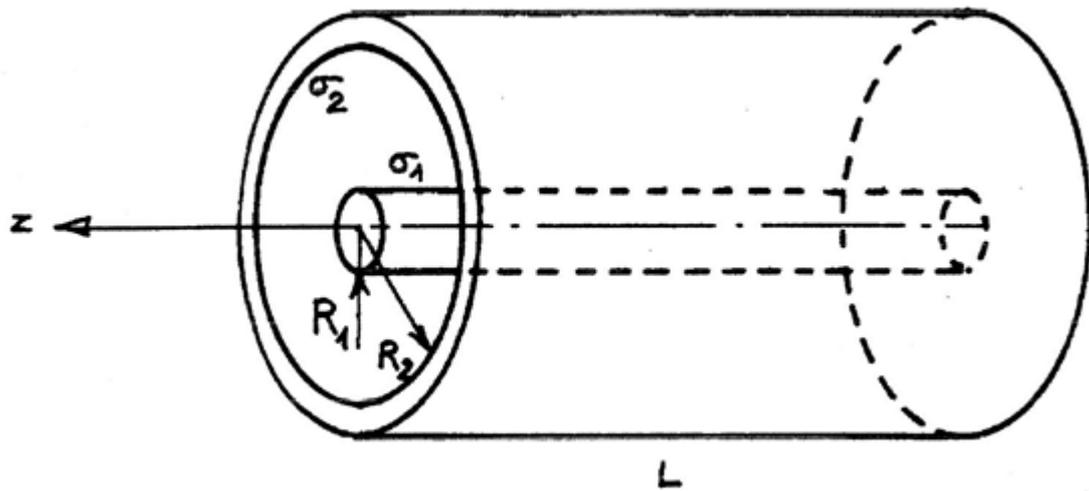


Figure 1

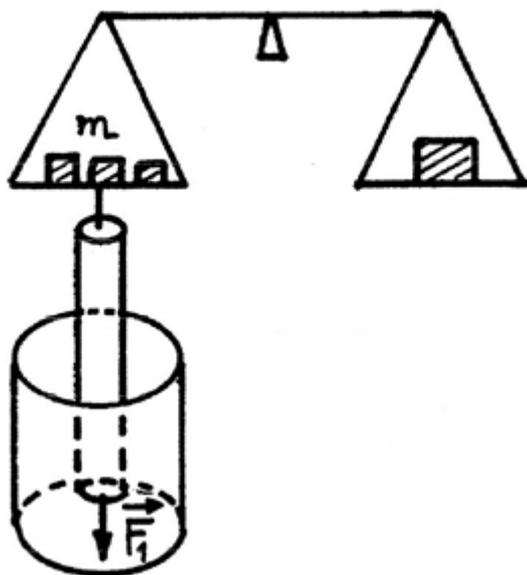


Figure 2

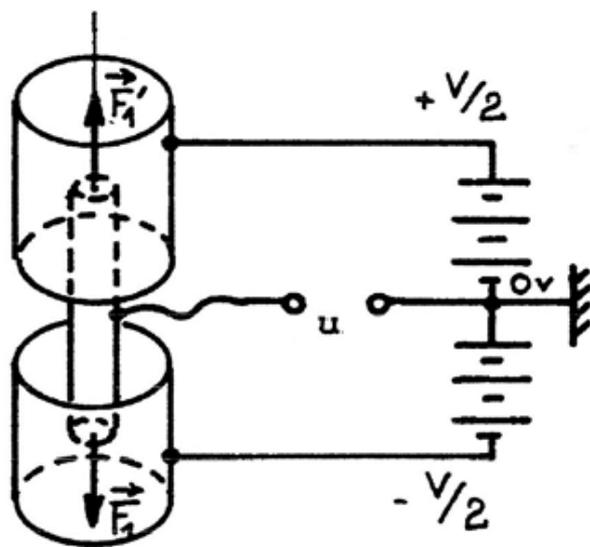


Figure 3

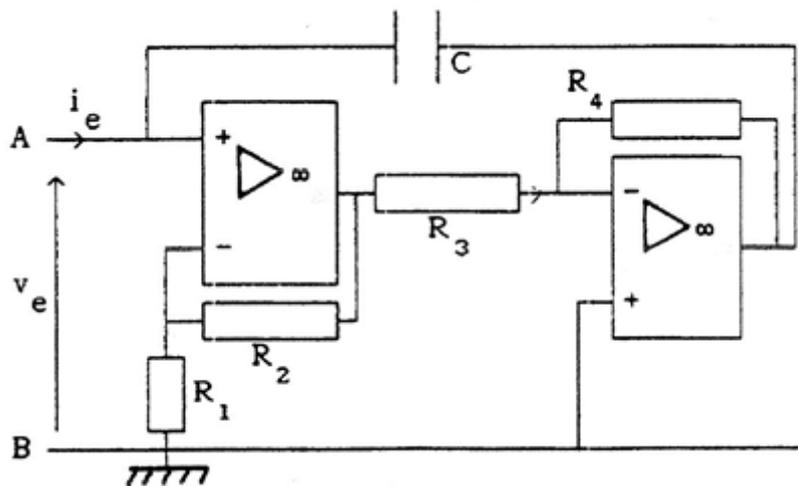


Figure 4