

<b>DEVOIR LIBRE n° 4</b>
--------------------------

*L'usage de calculatrices est interdit pour le 1<sup>er</sup> problème, et autorisé pour les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> problèmes.*

**PREMIER PROBLEME :** La chimie de l'azote : quelques applications industrielles (d'après banque PT 2020)

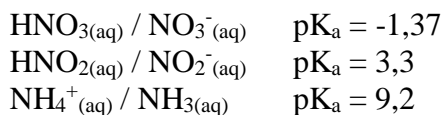
*L'usage de calculatrices est interdit pour ce problème.*

*Ce problème correspond à une épreuve de 2h (épreuve B de la banque PT).*

*Le sujet est composé de cinq parties indépendantes qui peuvent être traitées dans l'ordre de leur choix par les candidats.*

*Dans chaque partie, de nombreuses questions sont indépendantes.*

Données à 25 °C :



A T = 298 K :

espèces	N <sub>2(g)</sub>	H <sub>2(g)</sub>	NH <sub>3(g)</sub>
$\Delta_f H^\circ$ (kJ.mol <sup>-1</sup> )	?	?	-46
$S_m^\circ$ (J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )	190	130	192

$$E^\circ (\text{NO}_{3^{-}(\text{aq})} / \text{HNO}_{2(\text{aq})}) = 0,94 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{NO}_{3^{-}(\text{aq})} / \text{NO}_{(\text{g})}) = 0,96 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{HNO}_{2(\text{aq})} / \text{NO}_{(\text{g})}) = 0,99 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) / \text{Cu}_{(\text{s})}) = 0,34 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{Fe}^{3+}(\text{aq}) / \text{Fe}^{2+}(\text{aq})) = 0,77 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{MnO}_4^{-}(\text{aq}) / \text{Mn}^{2+}(\text{aq})) = 1,5 \text{ V}$$

$$\frac{RT}{F} \ln(10) = 0,06 \text{ V à } 25 \text{ °C}$$

$$\text{Volume molaire d'un gaz : } V_m = 22,4 \text{ L.mol}^{-1}$$

$$\text{Faraday : } 1.F = 9,65.10^4 \text{ C.mol}^{-1}$$

$$R = 8,3 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Paramètre de la maille du nitrure de titane : a = 425 pm

Constante d'Avogadro : N<sub>A</sub> = 6,0.10<sup>23</sup> mol<sup>-1</sup>

r<sub>Ti</sub> = 145 pm

$$\sqrt{2} - 1 = 0,414$$

Masse molaire du cuivre = 63,5 g.mol<sup>-1</sup>

Masse molaire du titane = 48,0 g.mol<sup>-1</sup>

Masse molaire de l'azote = 14,0 g.mol<sup>-1</sup>

Masse molaire de NO<sub>3</sub><sup>-</sup> = 62,0 g.mol<sup>-1</sup>

## La chimie de l'azote : Quelques applications industrielles

### **Partie 1 : Synthèse de l'ammoniac** (20 % du barème de ce problème)

Le procédé *Haber* est un procédé chimique en phase gazeuse servant à la synthèse de l'ammoniac  $\text{NH}_{3(\text{g})}$  par hydrogénation du diazote  $\text{N}_{2(\text{g})}$  atmosphérique par le dihydrogène  $\text{H}_{2(\text{g})}$  en présence d'un catalyseur.

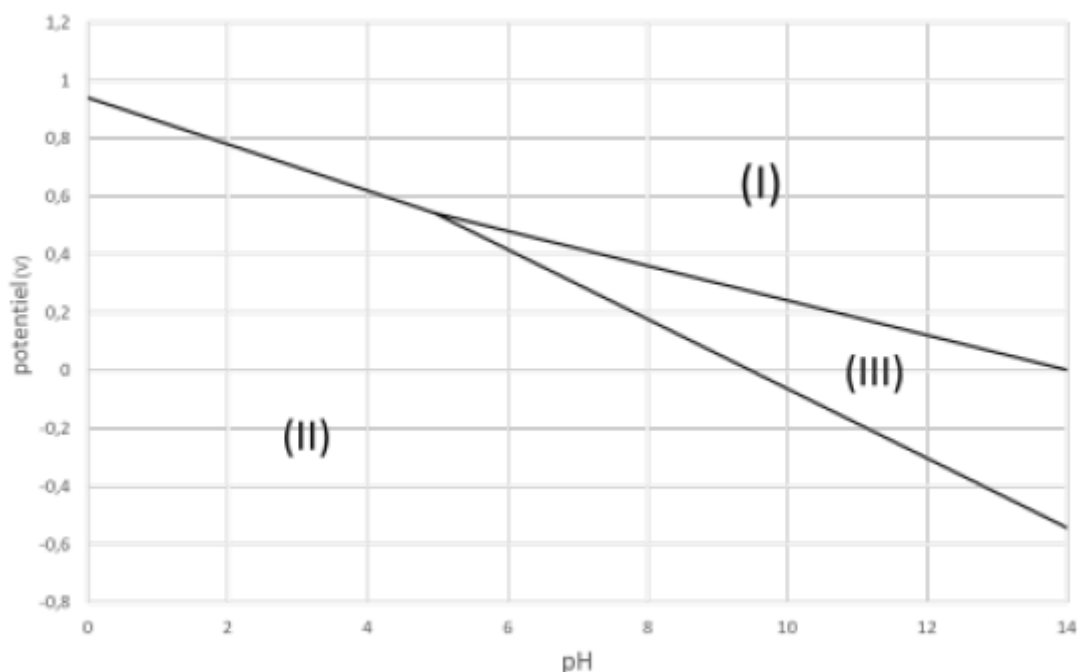
- 1) Ecrire l'équation de la réaction, notée (1), pour une mole de diazote.
- 2) Que valent les enthalpies standard de formation de  $\text{N}_{2(\text{g})}$  et  $\text{H}_{2(\text{g})}$  ? Justifier.
- 3) Calculer l'enthalpie standard de réaction de la réaction (1). Que peut-on en déduire ?
- 4) Calculer l'entropie standard de la réaction (1). Justifier son signe.
- 5) Exprimer la constante d'équilibre de cette réaction à 300 K en fonction des grandeurs thermodynamiques calculées dans les questions précédentes. On obtient :  $K^\circ = 6,03 \cdot 10^5$ .
- 6) Quelle est l'influence d'une augmentation de pression isotherme sur l'équilibre (1) ? Une justification rigoureuse est attendue.
- 7) Quelle est l'influence d'une augmentation de température isobare sur l'équilibre (1) ? Une justification rigoureuse est attendue.
- 8) Indiquer la définition d'un catalyseur. Expliquer pourquoi on utilise un catalyseur dans la synthèse de l'ammoniac.
- 9) La synthèse de l'acide nitrique  $\text{HNO}_3$  à partir de l'ammoniac passe notamment par les intermédiaires NO et  $\text{NO}_2$ . Proposer une représentation de Lewis de  $\text{NH}_3$ , NO et  $\text{NO}_2$  sachant qu'aucune d'entre elles ne fait intervenir de liaison O-O.
- 10) NO et  $\text{NO}_2$  possèdent une propriété chimique particulière. Laquelle ? Justifier la possibilité de dimérisation de NO et  $\text{NO}_2$ .

### **Partie 2 : Diagramme potentiel-pH** (20 % du barème de ce problème)

On se propose d'étudier le diagramme potentiel-pH simplifié de l'azote en se limitant aux substances ions nitrates  $\text{NO}_3^-$ (aq), acide nitreux  $\text{HNO}_2$ (aq), ions nitrites  $\text{NO}_2^-$ (aq) et monoxyde d'azote  $\text{NO}$ (g). La ligne frontière qui sépare deux domaines de prédominance ou de stabilité correspondra à une concentration de 1 mol.L<sup>-1</sup> pour chaque espèce en solution, et pour les gaz, à la pression standard de référence  $P^\circ = 1$  bar.

- 11) En vous aidant de la valeur de  $\text{pK}_a$  de l'acide nitrique  $\text{HNO}_3$ , expliquer pourquoi cette espèce n'intervient pas dans le diagramme potentiel-pH. Ecrire l'équation de dissolution de cet acide en solution aqueuse.
- 12) Ecrire les équations des demi-réactions redox associées aux couples  $\text{NO}_3^-$ (aq) /  $\text{HNO}_2$ (aq) et  $\text{HNO}_2$ (aq) /  $\text{NO}$ (g).

- 13) Que peut-on dire de la stabilité de  $\text{HNO}_2$  ? Ecrire l'équation correspondante et nommer la réaction.
- 14) Donner les degrés d'oxydation de l'azote dans les quatre espèces azotées concernées. A l'aide d'un schéma présentant en ordonnée le degré d'oxydation et en abscisse les valeurs de pH, indiquer les domaines de prédominance ou de stabilité des différentes espèces de l'azote.
- 15) On fournit ci-dessous un diagramme potentiel-pH muet de l'élément azote. Reporter le diagramme sur votre copie en indiquant la correspondance entre les espèces chimiques  $\text{NO}_{(g)}$ ,  $\text{NO}_3^-_{(aq)}$  et  $\text{NO}_2^-_{(aq)}$  et les zones I, II et III.



- 16) Quel couple redox faut-il prendre en compte pour tracer la ligne frontière séparant les domaines de I et III ? Donner l'équation de la ligne frontière en fonction des valeurs de pH et du potentiel standard du couple redox considéré.
- 17) Prévoir le comportement d'une lame de cuivre de 12,7 g plongée dans 300 mL d'une solution d'acide nitrique de concentration  $c = 2,00 \text{ mol.L}^{-1}$  : écrire une équation pour la réaction qui a lieu. Quelle est la quantité de matière initiale de chaque réactif ? En déduire le réactif limitant.
- 18) Calculer l'avancement de la réaction ainsi que les quantités de matière des espèces à l'issue de la réaction.
- 19) Quelle est la formule du gaz formé ? Indiquer la relation entre la quantité de matière de gaz formé et le volume de gaz produit.
- 20) Calculer la charge transférée lors de la réaction.

### **Partie 3 : Le nitrure de titane** (20 % du barème de ce problème)

Le nitrure de titane présente une dureté dépassant celle de la plupart des matériaux métalliques et a une température de fusion très élevée (environ 3000 °C). Ces remarquables propriétés physiques sont contrebalancées par sa fragilité, ce qui conduit à l'employer principalement comme film de revêtement. Ce composé présente une structure cristalline dans laquelle les atomes de titane forment un réseau cubique à faces centrées, les atomes d'azote occupant tous les sites interstitiels octaédriques de la structure.

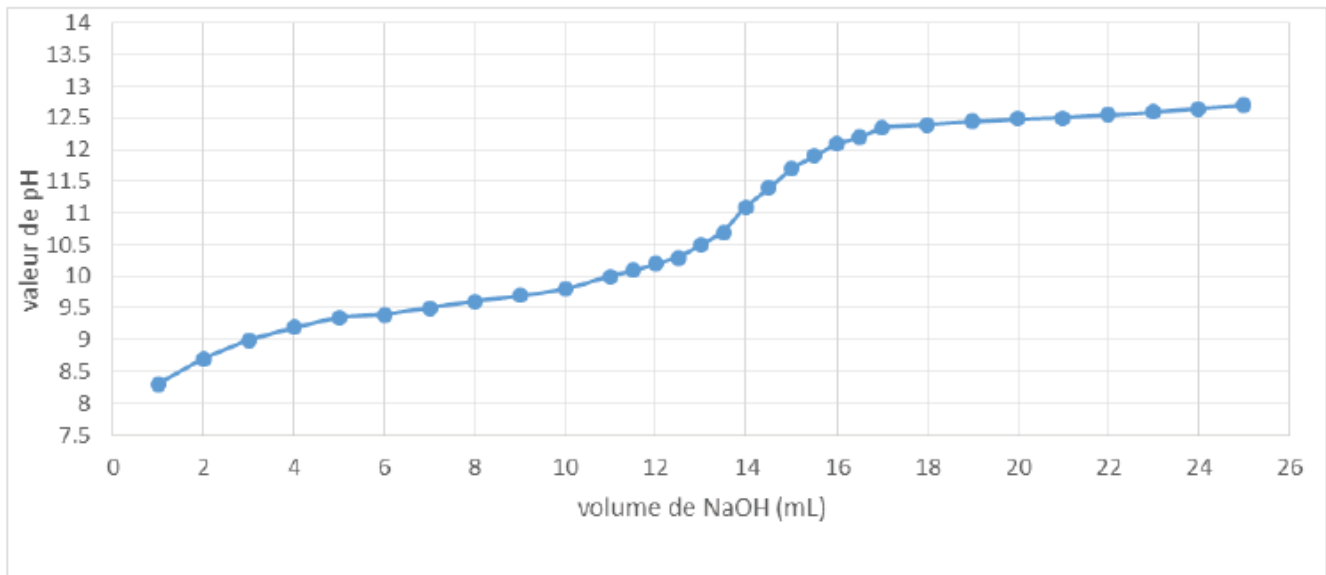
- 21) Représenter en perspective la maille du réseau métallique. Vous indiquerez et décrirez précisément la localisation et le nombre de sites octaédriques.
- 22) Déterminer le nombre de motifs par maille, ainsi que la coordinence du titane et de l'azote.
- 23) Donner un ordre de grandeur de la masse volumique du nitrure de titane.
- 24) Ecrire la relation de tangence entre le métal et l'azote.
- 25) En considérant que les atomes de titane ne doivent pas être tangents, donner l'inégalité vérifiée par le rayon  $r_{Ti}$  des atomes métalliques.
- 26) Indiquer la relation entre la taille du site octaédrique et  $r_{Ti}$  le rayon de l'atome métallique dans une maille cubique à faces centrées de titane pur de paramètre de maille  $a$ .
- 27) Le rayon de l'atome d'azote est de 65 pm. Que pouvez-vous en conclure ?

### **Partie 4 : Teneur en élément azote d'un engrais** (20 % du barème de ce problème)

L'ammonitrate est un engrais azoté solide, bon marché, très utilisé dans l'agriculture. Il est vendu par sac de 500 kg et contient du nitrate d'ammonium  $NH_4NO_3(s)$ . Les indications fournies par le fabricant d'engrais sur le sac à la vente stipulent que le pourcentage en masse de l'élément azote N est de 34,4 %.

Afin de vérifier l'indication du fabricant, on dose les ions ammonium  $NH_4^+(aq)$  présents dans l'engrais en introduisant dans un bécher  $V_1 = 10,0$  mL d'une solution préparée en dissolvant 6,00 g d'engrais dans une fiole jaugée de  $V_0 = 250$  mL. Cette solution est dosée à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration  $c = 0,200$  mol.L<sup>-1</sup>. A l'équivalence, le volume de soude ajouté  $V_E$  est de 14,0 mL.

- 28) Le nitrate d'ammonium est très soluble dans l'eau. Ecrire la réaction de dissolution correspondante.
- 29) L'ion ammonium  $NH_4^+(aq)$  est-il un acide ou une base selon Brønsted ? Justifier la réponse.
- 30) Ecrire l'équation de la réaction correspondant au titrage.
- 31) La figure ci-après représente la courbe  $pH = f(V_{NaOH})$ . Indiquer une méthode graphique pour trouver le point d'équivalence. Donner les coordonnées de ce point.



- 32) Quelles sont toutes les espèces chimiques présentes dans le mélange réactionnel à l'équivalence ? Justifier le pH basique de la solution en ce point.
- 33) Donner la formule littérale permettant de calculer la quantité de matière d'ions  $\text{NH}_4^+(\text{aq})$  dans la fiole jaugée en fonction des données. L'application numérique donne  $7,00 \cdot 10^{-2}$  mol d'ions  $\text{NH}_4^+(\text{aq})$ . En déduire la quantité de nitrate d'ammonium présente dans cette fiole.
- 34) Calculer la masse d'azote (arrondie au gramme près) présente dans l'échantillon. Les indications du fabricant sont-elles correctes ?

**Partie 5 : Pollution par les nitrates : dosage indirect des nitrates contenus dans une eau (20 % du barème de ce problème)**

Les nitrates ne sont dangereux pour la santé que s'ils sont en trop grande concentration dans l'eau. L'Organisation Mondiale de la Santé préconise, pour une personne, de ne pas consommer plus de 3,65 mg d'ions nitrate par kilogramme de masse corporelle et par jour. La législation française impose donc une teneur inférieure à  $50 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$  dans les eaux de consommation. Des analyses sont effectuées régulièrement pour vérifier la potabilité de l'eau, en particulier la teneur en ions nitrate.

Principe du dosage :

Lors du dosage indirect, on ajoute un excès de sel de Mohr, de formule  $\text{Fe}(\text{SO}_4)_2(\text{NH}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}(\text{s})$ , à un volume connu d'eau. Dans le sel de Mohr, le fer est à l'état d'oxydation +II. Les ions  $\text{Fe}^{2+}(\text{aq})$  en excès sont ensuite dosés par des ions permanganate  $\text{MnO}_4^-(\text{aq})$ . La concentration en nitrate dans l'eau s'en déduit.

Protocole expérimental du dosage :

Pour effectuer ce dosage, on introduit dans cet ordre, dans un erlenmeyer,  $V_0 = 50,0 \text{ mL}$  d'eau, puis  $10 \text{ mL}$  de solution d'acide sulfurique  $\text{H}_2\text{SO}_4$  à  $5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $V_1 = 100,0 \text{ mL}$  d'une solution aqueuse de sel de Mohr de concentration molaire  $c_1 = 1,00 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Après 45 min de chauffage au bain-marie, on dose ensuite les ions  $\text{Fe}^{2+}(\text{aq})$  en excès à l'aide d'une solution de permanganate de potassium  $\text{KMnO}_4$  de concentration  $c_2 = 3,00 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . On repère l'équivalence grâce au changement de couleur du mélange réactionnel, et on trouve un volume équivalent  $V = 11,0 \text{ mL}$  pour l'eau analysée.

- 35) Ecrire les deux demi-équations d'oxydo-réduction des couples  $\text{NO}_3^-_{(\text{aq})} / \text{NO}_{(\text{g})}$  et  $\text{Fe}^{3+}_{(\text{aq})} / \text{Fe}^{2+}_{(\text{aq})}$ .
- 36) En déduire l'équation de la réaction d'oxydo-réduction ayant lieu dans l'erlenmeyer avant le dosage. Justifier le fait que cette réaction est quasi-totale.
- 37) En déduire une relation entre la quantité de matière de  $\text{Fe}^{2+}$  restants présente dans l'erlenmeyer et les quantités de matière initiales des réactifs.
- 38) Ecrire la réaction du dosage des ions  $\text{Fe}^{2+}_{(\text{aq})}$  par les ions permanganate.
- 39) Donner l'expression littérale permettant de calculer la quantité d'ions  $\text{NO}_3^-_{(\text{aq})}$  présents dans l'échantillon d'eau. Le calcul donne  $2,78 \cdot 10^{-5}$  moles d'ions  $\text{NO}_3^-_{(\text{aq})}$ .
- 40) Peut-on considérer que l'eau dosée soit considérée comme potable ?
- 41) Quel volume de cette eau un enfant de 35 kg peut-il boire par jour sans préjudices pour sa santé ?

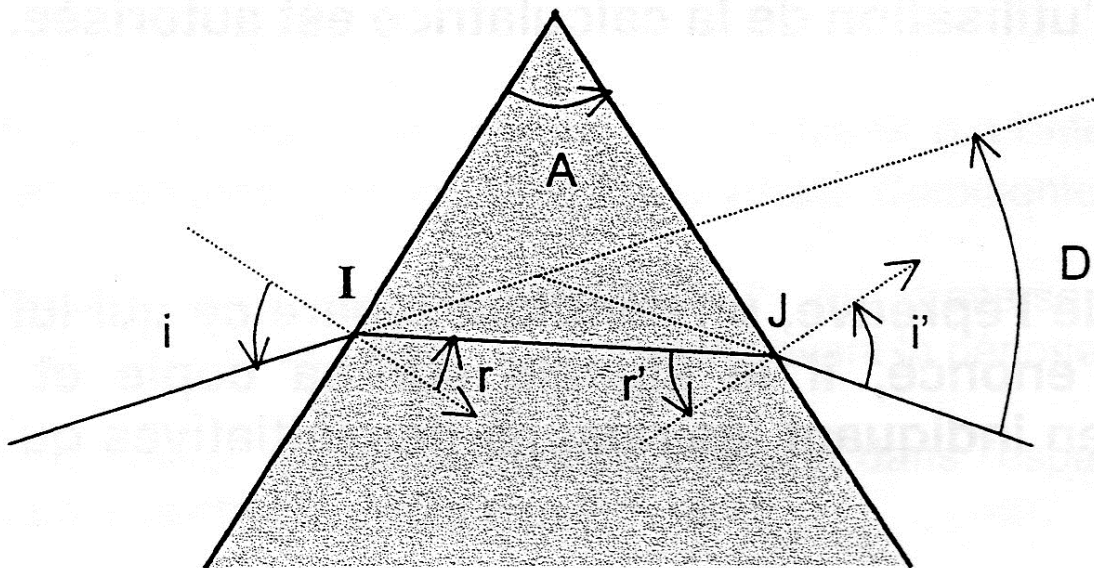
## DEUXIEME PROBLEME : Spectroscopie à prisme (d'après banque PT 2005)

L'usage de calculatrices est autorisé pour ce problème.

Le barème de ce problème correspondait à 20 % d'une épreuve de 4h.

Un spectroscopie est un appareil destiné à étudier le spectre d'une source lumineuse. Un collimateur permet de réaliser un faisceau de rayons parallèles qui va éclairer un prisme. Un viseur permet ensuite d'étudier la lumière ayant traversé le prisme.

Le prisme utilisé est caractérisé par un indice  $n$  qui dépend de la longueur d'onde. Sa section droite est un triangle d'angle  $A$ . Le prisme est placé dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1. Un rayon incident rencontre la face d'entrée au point  $I$  sous l'angle d'incidence  $i$  et l'émergent associé ressort par l'autre face au point  $J$  sous l'angle  $i'$ . On utilisera les angles orientés définis sur la figure suivante :



La convention de signe pour les angles est trigonométrique.

On suppose d'abord la lumière monochromatique et l'indice du prisme égal à  $n$ .

- 1) Rappeler les lois de DESCARTES pour la réflexion et la réfraction. En déduire des relations sur les angles  $i$  et  $r$  en  $I$ , puis sur les angles  $r'$  et  $i'$  en  $J$ . On suppose que le prisme permet l'existence du rayon émergent et on néglige, dans la suite, toute réflexion. Trouver une relation simple entre  $r$ ,  $r'$  et  $A$ .
- 2) Etablir la relation :  $D = i + i' - A$ .  
En appliquant le principe du retour inverse de la lumière, montrer que, pour une valeur de  $D$  possible donnée, il existe deux couples de solutions  $(i, i')$ . En déduire l'égalité de  $i$  et de  $i'$  lorsque  $D$  passe par un minimum (supposé unique).
- 3) Déterminer la valeur  $i_0$  de  $i$  correspondant au minimum de déviation en fonction de  $n$  et de  $A$ . Etablir une relation entre  $n$ , l'angle  $A$  et la déviation minimale  $D_m$ .

4) En déduire que l'indice  $n$ , les angles  $A$  et  $D_m$  vérifient une relation du type  $n = \frac{f\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{f\left(\frac{A}{2}\right)}$ , où  $f$  est une fonction que l'on précisera.

5) On éclaire le prisme avec une lampe à vapeur de mercure, pour laquelle on a mesuré  $D_m$  pour différentes longueurs d'onde et obtenu les valeurs de  $n$  correspondantes :

$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	0,4047	0,4358	0,4916	0,5461	0,5770
$n$	1,803	1,791	1,774	1,762	1,757
$1 / \lambda^2$ ( $\mu\text{m}^{-2}$ )	6,106	5,265	4,138	3,353	3,004

Montrer que  $n$  peut se mettre sous la forme  $n = a + b / \lambda^2$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Est-ce que le prisme est dispersif et pourquoi ?

6) Pour une lampe à vapeur de cadmium, on mesure un indice égal à  $n = 1,777$ . En déduire la longueur d'onde et donner la couleur correspondante.



**TROISIEME PROBLEME : Optique géométrique (d'après banque PT 2009)**

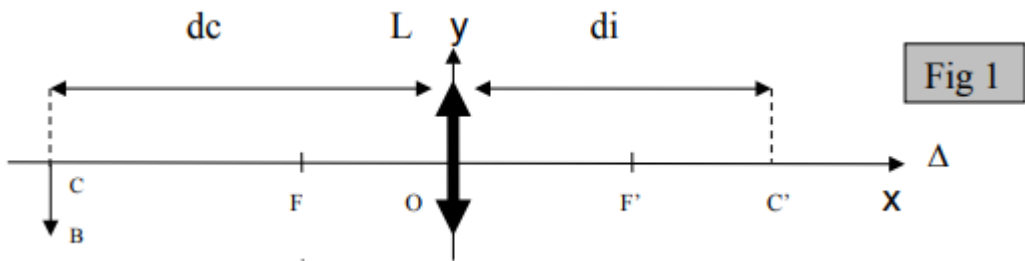
*L'usage de calculatrices est autorisé pour ce problème.*

**Partie A : Règle « de SCHEIMPFLUG »**

On considère une lentille L convergente de distance focale image  $f'$ .  
 On supposera que cette lentille, utilisée dans les conditions de Gauss, se comporte comme une lentille mince parfaitement stigmatique et aplanétique pour des couples de points conjugués.

**I) Image réelle d'un objet réel rectiligne dans un plan frontal.**

L'objet réel rectiligne CB de longueur H est dans un plan perpendiculaire à l'axe optique  $\Delta$ , à la distance  $d_c$  (supérieure à  $f'$ ) du centre optique O.

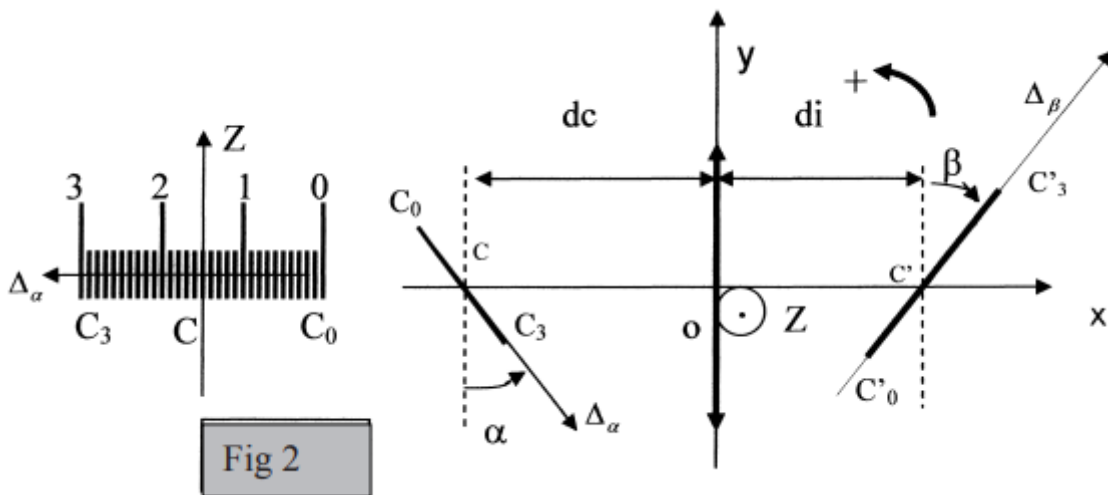


- 1) Donner, en fonction de  $d_c$  et  $f'$ , la distance  $OC' = di$ ,  $C'$  étant l'image réelle de C par L.
- 2) Donner, en fonction de  $d_c$ ,  $f'$  et H, la taille de l'image  $C'B'$ .
- 3) Calculer  $d_i$  si  $d_c = 10$  cm et  $f' = 3$  cm.
- 4) On associe à la lentille un repère OXY (figure 1). Un point objet M a pour coordonnées x et y. Donner les coordonnées  $x'$  et  $y'$  de son image  $M'$  par L en fonction de x, y et  $f'$ .

**II) Image d'un objet rectiligne incliné : règle de SCHEIMPFLUG.**

**1) La règle de SCHEIMPFLUG**

L'objet rectiligne  $C_0C_3$  est incliné d'un angle algébrique  $\alpha$ , la convention de signe pour les angles étant trigonométrique.



La règle s'énonce ainsi :

La lentille mince L donne d'un objet rectiligne  $C_0C_3$  incliné d'un angle  $\alpha$ , une image rectiligne  $C'_0C'_3$  inclinée d'un angle  $\beta$  avec :

$$\frac{d_c}{\tan(\alpha)} = -\frac{d_i}{\tan(\beta)} \quad (\text{les angles } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont algébriques}).$$

- a) Démontrer cette règle dans le seul cas où l'objet et l'image sont très peu inclinés par rapport à l'axe optique ( $\alpha$  est alors voisin de  $\pm \pi/2$  rad) ; on caractérisera au préalable, en fonction des distances  $d_c$ ,  $d_i$  et des tangentes des angles  $\alpha$  et  $\beta$ , la position des points d'intersection des droites  $C_0C_3$  et  $C'_0C'_3$  avec le plan de la lentille. La suite peut être traitée sans la réponse à cette question a).
- b) On prend  $\alpha = -57^\circ$  ; calculer  $\beta$  (en degrés).

## 2) Position de l'image d'un point.

On repère un point M de l'objet par son abscisse  $\xi = \overline{CM}$  sur l'axe orienté  $\Delta_\alpha$  ( $\xi = 0$  en C).

L'image M' de M par L est repérée par son abscisse  $\mu = \overline{C'M'}$  sur l'axe orienté  $\Delta_\beta$  ( $\mu = 0$  en C') (voir figure 2).

- a) Donner, dans le repère OXY associé à la lentille, les coordonnées (x, y) de M et, en utilisant un résultat du I-4), l'ordonnée y' de M', en fonction de  $d_c$ ,  $f'$ ,  $\alpha$  et  $\xi$ .  
Les résultats seront inscrits dans un tableau identique au tableau ci-dessous à reproduire.

point	M	M'
abscisse		
ordonnée		

- b) Trouver une relation entre  $y'$ ,  $\mu$  et  $\beta$ .
- c) En déduire que :  $\mu = \frac{K \cdot \xi}{1 - D \cdot \xi}$  avec  $D = \frac{\sin(\alpha)}{d_c - f'}$ .

Evaluer K en fonction de :  $d_c$ ,  $f'$ ,  $\cos(\alpha)$  et  $\cos(\beta)$ .

## 3) Déformation de l'image d'un objet.

L'objet  $C_0C_3$  porte une graduation centimétrique subdivisée en millimètre.

Il est positionné comme indiqué sur la figure 2 avec  $\alpha > 0$ ,  $f' = 15$  cm et  $d_c = 21$  cm.

La graduation 1,5 correspond au point C ( $\xi = 0$ ) ; son image est C' ( $\mu = 0$ ).

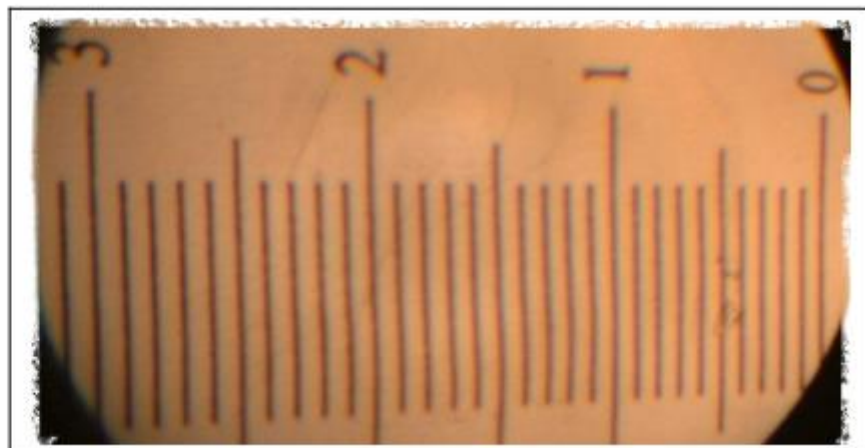
La graduation 0 correspond au point  $C_0$  ( $\xi_0 = -1,5$  cm) ; son image est  $C'_0$ .

La graduation 3 correspond au point  $C_3$  ( $\xi_3 = 1,5$  cm) ; son image est  $C'_3$ .

On prend une photographie de l'image de cet objet sur un écran orienté selon la règle de Scheimpflug (figure 3 ; échelle 1).

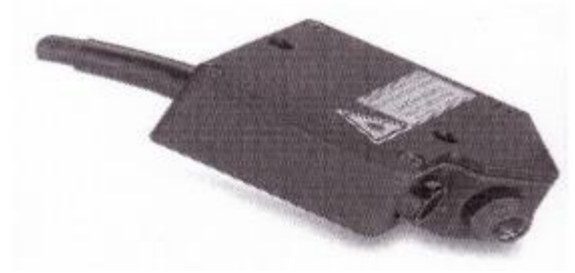
A partir d'une mesure des longueurs des segments  $C'C'_0$  et  $C'C'_3$ , déduire de II-2-c) la valeur numérique de D, puis la valeur de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .

Fig 3



## PARTIE B : Capteur de position par triangulation

L'élément de base du capteur est un photo-détecteur, issu de la technologie des diodes PIN, appelé PSD (Position Sensitive Detector).



*Principe de mesure par triangulation LASER :*

Un pinceau de lumière LASER est projeté sur l'objet cible à mesurer et renvoyé de manière diffuse par celui-ci.

A travers un objectif, un spot est reproduit sur un détecteur de position (PSD).

L'élément PSD fournit une tension de sortie analogique, asservie à la position, fonction de la distance mesurée.

L'objet cible doit présenter une surface diffusant la lumière : une cible à surface réfléchissante ne permettrait pas au capteur de fonctionner correctement.

On admettra qu'une surface diffuse renvoie la lumière dans toutes les directions.

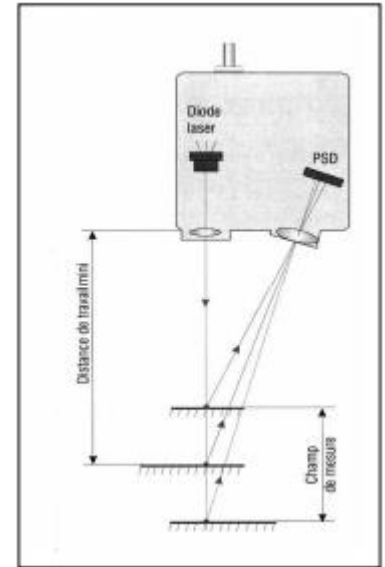


Fig 4

### 1) Géométrie simple.

- La cible à détecter peut se translater entre deux positions extrémales  $C_i$  (abscisse  $Z_i$ ) et  $C_s$  (abscisse  $Z_s$ ).
- On souhaite régler la cible à la position de référence  $C_r$  ( $Z_r = 0$ ).
- On dispose le détecteur PSD parallèlement au pinceau incident  $Z'Z$ .
- On supposera, dans une première approche, que le détecteur est excité uniquement au point où arrive le rayon passant par le centre optique  $O$  de la lentille convergente : la cible à l'abscisse  $Z$  génère un spot à l'abscisse  $x$  du PSD.
- Cette lentille est disposée de telle sorte que le rayon utile issu de  $C_r$  arrive au milieu du PSD, à l'abscisse  $x = 0$ , ces points étant optiquement conjugués par la lentille.
- La figure 5 représente la géométrie du dispositif ; on notera que l'angle  $\alpha$  est ici un angle négatif.

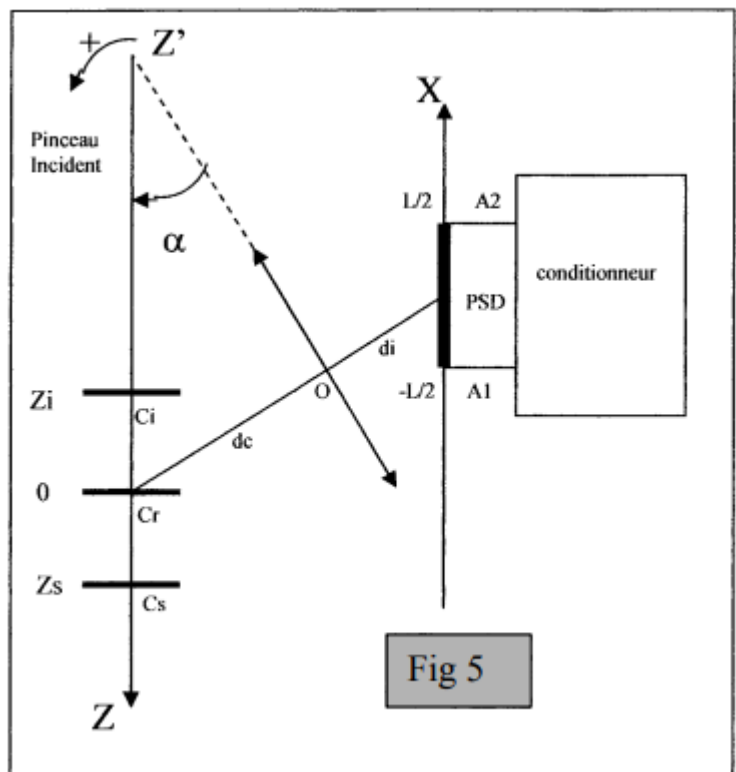


Fig 5

On note  $d_c$  la distance de Cr au centre optique O, et  $d_i$  la distance de O au milieu du PSD. La distance  $d_c$  est supérieure à la focale image  $f'$  de la lentille convergente.

- a) Par des considérations géométriques simples, exprimer  $Z$  en fonction de  $x$ ,  $d_c$  et  $d_i$ .
- b) Le PSD ayant une longueur  $L$ , donner, littéralement puis numériquement, les abscisses extrémales de la cible ( $Z_i$  et  $Z_s$ ) pouvant être détectées dans cette géométrie.  
**Données** :  $d_c = 10,0$  cm ;  $d_i = 4,3$  cm,  $f' = 3,0$  cm,  $L = 20$  mm,  $\alpha = -57^\circ$ .
- c) On suppose que la tension  $U_s$  en sortie du conditionneur est liée à l'abscisse  $x$  du spot sur le PSD par la relation  $U_s = A.x$  (avec  $A = 1.10^3$  V/m).  
L'électronique ne permet de distinguer deux mesures qu'à  $\delta U_s = 1.10^{-3}$  V près.  
Donner, littéralement puis numériquement, le plus petit écart  $\delta Z$  de la cible détectable par le dispositif. Dépend-il de la position de la cible ?

## 2) Critique de la géométrie simple.

En réalité, le point de la cible diffusant la lumière incidente se comporte vis-à-vis de la lentille comme un objet lumineux ponctuel.

Par construction, le centre du détecteur PSD ( $x = 0$ ) est le conjugué par la lentille du point Cr.

- a) A l'aide d'un tracé de rayon, déterminer la position de l'image de la cible d'abscisse  $Z$  quelconque (mais différente de  $Z_s$ ).
- b) Expliquer, en 5 lignes au plus, pourquoi les résultats de B-1-c) sont illusoire.

## 3) Optimisation de la géométrie.

On optimise la géométrie en positionnant le PSD là où se forment les images du point cible C, conformément à la règle de Scheimpflug énoncée au A-II-1).

Pour cela, on doit faire tourner la surface du PSD d'un angle  $\varphi$ .

- a) En utilisant la règle de Scheimpflug, déterminer numériquement  $\varphi$ , en degrés.
- b) Dans cette géométrie optimisée, on montre que  $x = \frac{B.Z}{1 + C.Z}$  ;  
On calcule, avec les données numériques de B-1) :  $B = 0,2797$  et  $C = 11,98 \text{ m}^{-1}$ .

$x$  variant toujours entre  $-L/2$  et  $+L/2$ , donner les valeurs extrêmes de  $Z$ .

- c) Le conditionneur et l'électronique ont mêmes propriétés qu'en B-1-c).  
Trouver la relation donnant le plus petit écart détectable  $\delta Z$  en fonction de  $\delta U_s$ ,  $Z$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On pourra utiliser une différentielle logarithmique (aide non fournie par l'énoncé original).
- d)  $\alpha$ ) Calculer  $\delta Z$  aux points  $Z = 0$ ,  $Z_i$  et  $Z_s$ .  
 $\beta$ ) Tracer le graphique donnant  $\delta Z$  en fonction de  $Z$  dans la plage de mesure du capteur.

## 4) Discussion.

Expliquer pourquoi une cible réfléchissant la lumière ne permet pas un bon fonctionnement du capteur.