KHÔLLE 1

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Monter que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$. La fonction f est-elle continue en 0 ? sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
5. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
6. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

EXERCICE 2

Soit A une matrice telle que $(A+I)^2 = 0$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

KHÔLLE 1

EXERCICE 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
   Indication : se ramener à une équation $g(x) = 0$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq x_n < 1/2$ (on admettra que $f(1/2) < 1/2$).
4. Etudier la monotonie de la suite (x_n).
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge puis déterminer sa limite.

EXERCICE 2

Soit A une matrice telle que $(A + I)^2 = 0$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
Bonus Calculer les puissances de A : A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

KHÔLLE 1

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1. Etudier le signe de f sur son ensemble de définition.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   Indication : on pourra faire apparaître des limites classiques de la forme $\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ *avec* $u \to 0$.
3. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée.
5. Peut-on prolonger $f$en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
6. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

EXERCICE 2

Soit A une matrice telle que $A^2 - I = 0$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.