PT 2020-2021 DS3

PREMIER PROBLEME :

Etude de quelques modèles de turboréacteurs (d'après banque PT 2014)

I) Généralités :

1) masse $M_\Omega(t) = M_\Sigma(t) + dm_e$

$$M_\Omega(t+dt) = M_\Sigma(t+dt) + dm_s$$

or Ω = système fermé $\Rightarrow M_\Omega(t) = M_\Omega(t+dt)$

or régime permanent $\Rightarrow M_\Sigma(t) = M_\Sigma(t+dt)$

$\Rightarrow dm_e = dm_s$

Entre t et $t+dt$, Ω échange de l'énergie avec l'extérieur :

* P_{th} puissance thermique
* P_i puissance indiquée
* travail des forces volumiques comme le poids
  $\Rightarrow$ dérive d'une énergie potentielle
* travail des forces de pression en amont et en aval

dV_e volume de dm_e

dV_s volume de dm_s

$D_m = \frac{dm}{dt} \Rightarrow dV_e = v_e\, dm_e = v_e D_m\, dt$

$dV_s = v_s D_m\, dt$

$(P_e S_e) dl_e$

écoulement de e vers s $\Rightarrow \delta W_e = +P_e\, dV_e = P_e v_e D_m\, dt$

$\delta W_s = -P_s\, dV_s = -P_s v_s D_m\, dt$

$\Rightarrow P_{pression} = (P_e v_e - P_s v_s) D_m$

1er principe pour Ω (système fermé) entre t et $t+dt$:

$dE = \delta W + \delta Q$ avec $E = U + E_c + E_p$

indépendant de t (régime permanent)

$dE = E(t+dt) - E(t) = (dE_s + E_\Sigma) - (dE_e + E_\Sigma)$

$= dE_s - dE_e = dm(u_s - u_e + e_{c_s} - e_{c_e} + e_{p_s} - e_{p_e})$

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{D_m}(u_s - u_e + e_{c_s} - e_{c_e} + e_{p_s} - e_{p_e})$$

1er principe : $\frac{dE}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} = P_i + (P_e v_e - P_s v_s) D_m + P_{th}$

$$\Rightarrow D_m\left[\underbrace{(u_s + P_s v_s)}_{h_s} - \underbrace{(u_e + P_e v_e)}_{h_e} + e_{c_s} - e_{c_e} + e_{p_s} - e_{p_e}\right] = P_i + P_{th}$$

durée dt : $dm = D_m\, dt$ et $\delta W_i = P_i\, dt$
$= dm\, w_i$

$\Rightarrow P_i = D_m w_i$

De même, $P_{th} = D_m q$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}(h_s - h_e) + (e_{c_s} - e_{c_e}) + (e_{p_s} - e_{p_e}) = w_i + q \\ \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q\end{array}}$$

2) $\Delta h + \Delta e_c + \cancel{\Delta e_p} = \cancel{w_i} + \cancel{q}$

négligé — pas de parties mobiles — adiabatique car calorifugé

$$\Rightarrow (h_s - h_e) + \underbrace{(e_{c_s} - e_{c_e})}_{\frac{c_s^2}{2} - \cancel{\frac{c_e^2}{2}}} = 0$$

$\frac{c_e^2}{2} \simeq 0$

2ème loi de Joule (gaz parfait) : $h_s - h_e = c_p(T_s - T_e)$

$\Rightarrow c_p(T_s - T_e) + \frac{c_s^2}{2} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{c_s = \sqrt{2 c_p (T_e - T_s)}}$$

II) Turboréacteur d'avion de chasse :

A) Turboréacteur sans post-combustion :

3) a) Dans le compresseur, on a une évolution isentropique pour un gaz parfait, et $\gamma = c^{te}$.

$\Rightarrow$ loi de Laplace : $PV^\gamma = c^{te} \Rightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = c^{te}$

$\Rightarrow P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

$$\Rightarrow \boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1\, \tau_{1-2}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

3)2) Pour le fluide allant de 1 vers 2 : 1^er principe pour les systèmes ouverts

$$\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\text{négligés}} = w_i + \underbrace{q_e}_{\substack{\text{adiabatique (isentropique)}\\ \hookrightarrow \text{adiabatique + réversible}}}$$

$$\Rightarrow w_{i_{12}} = h_2 - h_1 \underset{\uparrow\ 2^{\text{ème}}\text{ loi de Joule (GP)}}{=} c_p(T_2 - T_1) \qquad \boxed{w_{i_{12}} = c_p(T_2 - T_1)}$$

4)1) $w_{i_{12}} = c_p(T_2 - T_1) \Rightarrow T_2 = T_1 + \dfrac{w_{i_{12}}}{c_p}$

$$T_2 = 300 + \frac{279}{1{,}00} \qquad \boxed{T_2 = 579\ \text{K}}$$

4)2) Pour le fluide allant de 3 à 4 (qui traverse la turbine) :

$$\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\text{négligés}} = w_i + \underbrace{q_e}_{\text{adiabatique (isentropique)}}$$

$$\Rightarrow w_{i_{34}} = h_4 - h_3 \underset{\uparrow\ 2^{\text{ème}}\text{ loi de Joule (GP)}}{=} c_p(T_4 - T_3)$$

or la puissance mécanique cédée à la turbine est intégralement transmise au compresseur

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{i_{34}} = -\mathcal{P}_{i_{12}}$$

$$D_m w_{i_{34}} = -D_m w_{i_{12}} \Rightarrow w_{i_{34}} = -w_{i_{12}} = c_p(T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow c_p(T_1 - T_2) = c_p(T_4 - T_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_4 = T_1 + T_3 - T_2} = 300 + 1200 - 579$$

$$\boxed{T_4 = 921\ \text{K}}$$

5)1) Dans la turbine, on a une évolution isentropique, pour un GP avec $\gamma = c^{te}$ ⇒ loi de Laplace

$$P^{1-\gamma} T^{\gamma} = c^{te} \Rightarrow P_3^{1-\gamma} T_3^{\gamma} = P_4^{1-\gamma} T_4^{\gamma}$$

$$\Rightarrow P_4 = P_3 \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \qquad \text{or } P_3 = P_2 = \tau_{1-2} P_1$$

$$\boxed{P_4 = \tau_{1-2} P_1 \left(\frac{T_4}{T_3}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

5)2) Idem dans la tuyère : $P_4^{1-\gamma} T_4^{\gamma} = P_5^{1-\gamma} T_5^{\gamma}$

$$\Rightarrow \boxed{T_5 = T_4 \left(\frac{P_5}{P_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_3 \left(\frac{P_5}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

6)1) $\boxed{\mathcal{P}_{cin} = D_m e_c}$

6)2)1) cf 2) : $\Delta h + \Delta e_c + \underbrace{\Delta e_p}_{\text{négligé}} = \underbrace{w_i}_{\substack{\text{pas de}\\ \text{parties mobiles}}} + \underbrace{q_e}_{\text{adiabatique (isentropique)}}$ pour le fluide traversant la tuyère

$2^{\text{ème}}$ loi de Joule (GP) : $\Delta h = c_p \Delta T$

$$\Rightarrow c_p(T_5 - T_4) + e_{c_5} - \underbrace{e_{c_4}}_{\simeq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{cin\,A} = D_m e_{c_5} = -D_m c_p (T_5 - T_4)$$

$$\mathcal{P}_{cin\,A} = -50{,}0 \times 1{,}00 \times (621 - 921)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{P}_{cin\,A} = D_m c_p (T_4 - T_5) &= 1{,}50.10^4\ \text{kW}\\ &= 15{,}0\ \text{MW}\end{aligned}}$$

6)2)2) Pour l'air allant de 2 à 3 :

$$\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\text{négligés}} = \underbrace{w_i}_{\substack{\text{pas de parties mobiles ds chambre}\\ \text{de combustion}}} + q$$

$$\mathcal{P}_{th_A} = D_m q = D_m(h_3 - h_2) \underset{\uparrow\ 2^{\text{ème}}\text{ loi de Joule (GP)}}{=} D_m c_p (T_3 - T_2)$$

$$= 50{,}0 \times 1{,}00 \times (1200 - 579) = 3{,}11.10^4\ \text{kW}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{th_A} = D_m c_p (T_3 - T_2) = 3{,}11.10^4\ \text{kW} = 31{,}1\ \text{MW}}$$

6)2)3) $\mathcal{P}_{th_A} = D_{k_A} P_k$ car l'énergie fournie à l'air provient de la combustion du kérosène.

$$\boxed{D_{k_A} = \frac{\mathcal{P}_{th_A}}{P_k} = \frac{3{,}11.10^7}{50{,}0.10^6} = 0{,}621\ \text{kg.s}^{-1}}$$

7) $\boxed{\eta_{th_A} = \dfrac{\mathcal{P}_{cin\,A}}{\mathcal{P}_{th_A}} = \dfrac{15{,}0}{31{,}1} = 0{,}482}$

8) 1 : isobare P_1 ∩ isotherme T_1

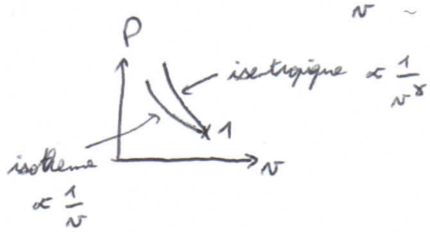
1→2 : isentropique

⇒ verticale dans le diagramme entropique isentropique + GP + $\gamma = c^{te}$ ⇒ loi de Laplace : $P v^{\gamma} = c^{te}$

⇒ $P = \dfrac{c^{te}}{v^{\gamma}}$ pour une isentropique

équation d'état des GP : $P v = r T$

⇒ isotherme : $P = \dfrac{c^{te}}{v}$



(2) : isentropique passant par (1) $\cap$ isotherme T_2
ou $\cap$ isobare P_2

(2→3) : isobare P_2

(3) : isobare P_2 $\cap$ isotherme T_3

(3→4) : isentropique

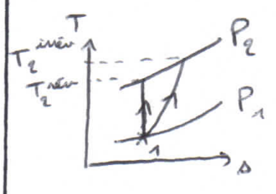
(4) : isentropique passant par 3 $\cap$ isotherme T_4
ou $\cap$ isobare P_4

(4→5) : isentropique

(5) : isentropique passant par 4 $\cap$ isotherme T_5
$\cap$ isobare $P_5 = P_1$

9)1) 2^{nd} principe : $\Delta s = \underbrace{s_{échange}}_{0 \text{ (calorifugé)}} + \underbrace{s_{créée}}_{>0 \text{ (irréversible)}}$

⇒ $\Delta s > 0$ ⇒ $s_2 > s_1$



⇒ $\boxed{T_2^{irrév} > T_2^{rév}}$

9)2) cf feuille annexe

B) Activation de la post-combustion :

10) de 6 à 7, à travers la tuyère : évolution isentropique, pour un gaz parfait, avec $\gamma = c^{te}$.

⇒ loi de Laplace : $P_6^{1-\gamma} T_6^{\gamma} = P_7^{1-\gamma} T_7^{\gamma}$

or $P_6 = P_4$ et $P_7 = P_1$

⇒ $$\boxed{T_7 = T_6 \left(\frac{P_1}{P_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

11)1) De 4 à 6 : $\Delta h + \underbrace{\cancel{\Delta e_c} + \cancel{\Delta e_p}}_{\text{négligés}} = \underbrace{\cancel{w_i}}_{\text{pas de parties mobiles}} + q_{46}$

$2^{ème}$ loi de Joule (GP) : $\Delta h = c_p \Delta T$

⇒ $q_{46} = c_p (T_6 - T_4) = 1{,}00\,(2000 - 921)$
$= 1{,}08.10^3$ kJ.kg^{-1}

$$\boxed{q_{46} = c_p (T_6 - T_4) = 1{,}08.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

11)2) Par analogie avec la question 6)2)1)

$P_{cin\,B} = D_m c_p (T_6 - T_7) = 50{,}0 \times 1{,}00 \times (2000 - 1350)$
$= 32{,}5.10^3$ kW

$$\boxed{P_{cin\,B} = D_m c_p (T_6 - T_7) = 32{,}5 \text{ MW}}$$

11)3) Par analogie avec la question 6)2)2)

$\mathcal{P}_{th\,B} = \mathcal{P}_{th\,A} + D_m c_p (T_6 - T_4)$
$= D_m c_p (T_3 - T_2 + T_6 - T_4)$
$= 50{,}0 \times 1{,}00\,(1200 - 579 + 2000 - 921)$
$= 85{,}0.10^3$ kW

$$\boxed{\mathcal{P}_{th\,B} = D_m c_p (T_3 - T_2 + T_6 - T_4) = 85{,}0 \text{ MW}}$$

11)4) $$\boxed{D_{k\,B} = \frac{\mathcal{P}_{th\,B}}{P_k} = \frac{85{,}0.10^6}{50{,}0.10^6} = 1{,}70 \text{ kg.s}^{-1}}$$

12)1) $$\boxed{\eta_{th\,B} = \frac{\mathcal{P}_{cin\,B}}{\mathcal{P}_{th\,B}} = \frac{32{,}5}{85{,}0} = 0{,}382}$$

12)2) $$\boxed{\eta_{th\,A} = 0{,}482 > \eta_{th\,B} = 0{,}382}$$

Avec la post-combustion, le rendement thermique est moins bon. C'est-à-dire qu'à $\mathcal{P}_{cin}$ fixée, il faudra consommer plus de kérosène dans le cas de la post-combustion.

Par contre, $\mathcal{P}_{cin\,B} = 32{,}5$ MW $> \mathcal{P}_{cin\,A} = 15{,}0$ MW.

⇒ Grâce à la post-combustion, on obtient une puissance cinétique plus importante.

12)3) * décollage sur piste courte (ex : porte-avion) :

mettre la post-combustion $\Rightarrow$ grande $\mathcal{P}_{cin}$

* vol de croisière ou décollage sur piste longue :

ne pas mettre la post-combustion pour ne pas "brûler" du kérosène inutilement.

* combat aérien : mettre la post-combustion pour se sauver en vitesse !

12)4) * la post-combustion consomme beaucoup de kérosène

$\Rightarrow$ autonomie réduite

* les températures atteintes sont importantes et pourraient finir par endommager le réacteur ?

III) Turboréacteur d'avion de transport :

13)1) bilan enthalpique pour le fluide allant de 1 à 2 :

$$\Delta h + \underbrace{\cancel{\Delta e_c} + \cancel{\Delta e_p}}_{\text{négligés}} = w_i + \underbrace{\cancel{q}}_{\text{adiabatique (car isentropique)}}$$

$$\Rightarrow w_{i_{12}} = h_2 - h_1 \underset{\text{2ème loi de Joule (GP)}}{=} c_p (T_2 - T_1)$$

$$= 1{,}00 \times (366 - 300) = 66 \quad kJ.kg^{-1}$$

$$\boxed{w_{i_{12}} = c_p (T_2 - T_1) = 66 \ kJ.kg^{-1}}$$

De même, $w_{i_{23}} = c_p (T_3 - T_2) = 1{,}00 \times (706 - 366)$

$$\boxed{w_{i_{23}} = c_p (T_3 - T_2) = 340 \ kJ.kg^{-1}}$$

13)2) De même pour la turbine : $w_{i_{45}} = c_p (T_5 - T_4)$

or la turbine entraîne le compresseur et la soufflante

$\Rightarrow - \mathcal{P}_{i_{45}} = \mathcal{P}_{i_{12}} + \mathcal{P}_{i_{23}}$

$\Rightarrow - D_{m_I} w_{i_{45}} = (D_{m_I} + D_{m_{II}}) w_{i_{12}} + D_{m_I} w_{i_{23}}$

$$-D_{m_I} c_p (T_5 - T_4) = (D_{m_I} + 4 D_{m_I}) c_p (T_2 - T_1) + D_{m_I} c_p (T_3 - T_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_5 = 5T_1 - 4T_2 - T_3 + T_4 = 655 \ K}$$

14)1) Par analogie avec 6)2)1) :

$$P_{cin\,I} = D_{m_I} c_p (T_5 - T_6) = 50{,}0 \times 1{,}00 (655 - 563)$$
$$= 4{,}6 . 10^3 \ kW$$

$$\boxed{P_{cin\,I} = D_{m_I} c_p (T_5 - T_6) = 4{,}6 \ MW}$$

14)2) De même, $P_{cin\,II} = D_{m_{II}} c_p (T_2 - T_7) = 4 D_{m_I} c_p (T_2 - T_7)$

$$= 4 \times 50{,}0 \times 1{,}00 (366 - 300)$$
$$= 13 . 10^3 \ kW$$

$$\boxed{P_{cin\,II} = 4 D_{m_I} c_p (T_2 - T_7) = 13 \ MW}$$

15) Par analogie avec 6)2)2) :

$$\mathcal{P}_{th_C} = D_{m_I} c_p (T_4 - T_3) = 50{,}0 \times 1{,}00 (1325 - 706)$$
$$= 31{,}0 . 10^3 \ kW = 31{,}0 \ MW$$

$$\eta_{th_C} = \frac{P_{cin\,I} + P_{cin\,II}}{\mathcal{P}_{th_C}} = \frac{13 + 4{,}6}{31{,}0} = \frac{18}{31{,}0} = 0{,}58$$

$$\boxed{\eta_{th_C} = 0{,}58}$$

IV) Comparaison des caractéristiques des moteurs de types (A) et (C) :

16) * $D_{k_A} = D_{k_C} \Rightarrow \mathcal{P}_{th_A} = \mathcal{P}_{th_C}$

$\eta_{th_A} < \eta_{th_C}$ or $\mathcal{P}_{th_A} = \mathcal{P}_{th_C}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{cin\,A} < \mathcal{P}_{cin\,C}$

$\Rightarrow$ le turboréacteur de type C est plus performant

* valeurs en accord avec les études précédentes !

17) * Pour ne pas dépasser le mur du son

↳ ne pas faire de bruit insupportable pour les passagers

↳ avion difficile à diriger

* Pour ne pas avoir trop de "vent" sur la piste de décollage

18) * Les réacteurs de type C sont trop gros, trop volumineux, pour équiper des avions de chasse.

* Les réacteurs de type B permettent d'obtenir une plus grande puissance cinétique : $\mathcal{P}_{cin\,B} > \mathcal{P}_{cin\,C}$

FEUILLE ANNEXE (☞ à rendre avec la copie)

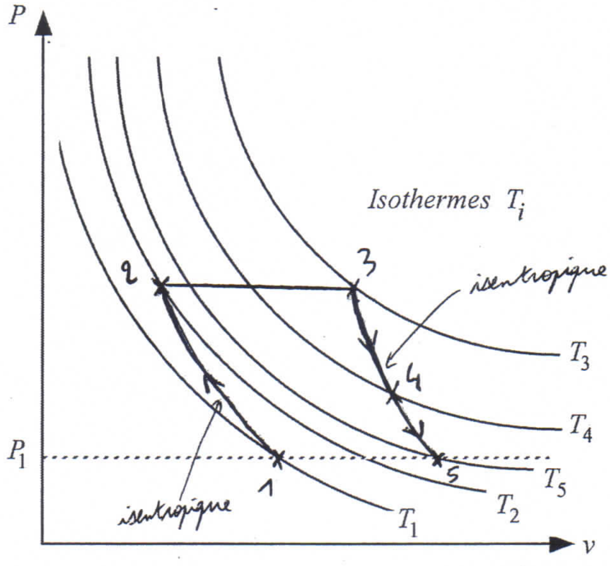


Figure **f.9**

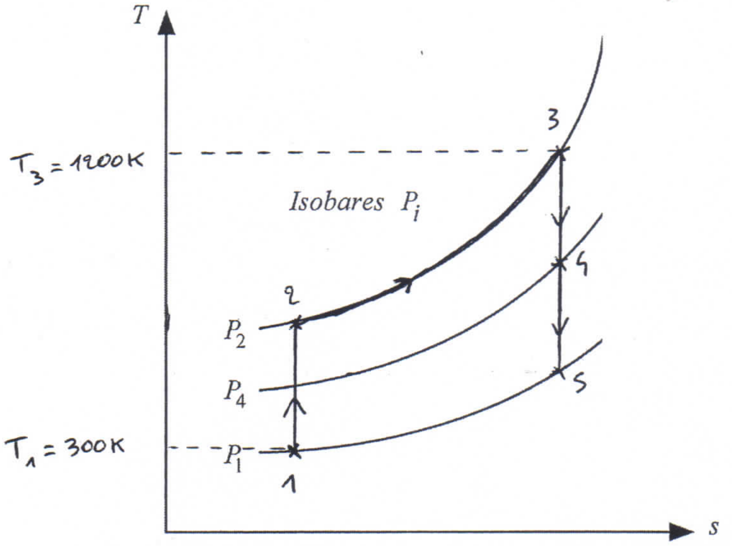


Figure **f.10**

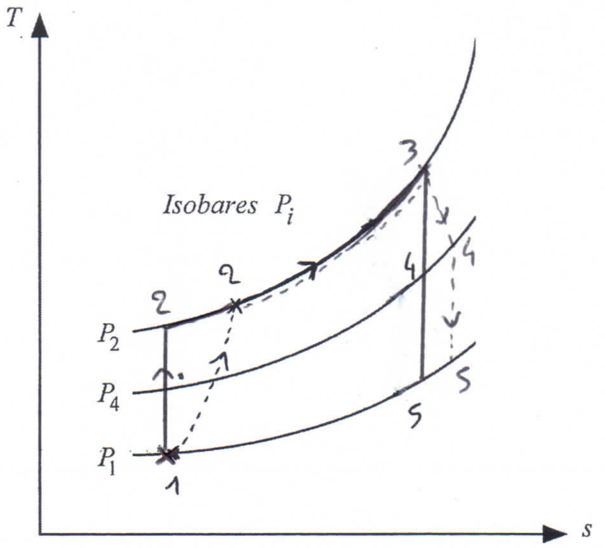


Figure **f.11**

PT 2020-2021 — DS3

DEUXIEME PROBLÈME : Diffusion thermique (banque PT 1998)

1) * D'après la loi de Fourier : $\vec{j_Q} = -\lambda \, \vec{grad}\, T \underset{\text{unidimensionnel}}{=} -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u_x}$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta Q_e &= -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{en } x} \sigma \, dt \\ \delta Q_s &= -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{en } x+dx} \sigma \, dt \end{aligned}}$$

(entrant en x)

(sortant en $x+dx$)

* bilan d'énergie pour le système entre x et $x+dx$ pendant la durée dt : (à pression constante)

$dH = \delta Q_p$ or $dH = C\, dT = dm\, c\, dT$

$dH = c \rho \sigma dx\, dT = c \rho \sigma dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$

$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s = \lambda \sigma dt \left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x} \right)$

$= \lambda \sigma dx\, dt \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

ici : régime permanent $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} = 0}$

2) $\Rightarrow T(x) = Ax + B$

conditions aux limites ($T(x=0) = T_1$ et $T(x=L) = T_2$) $\Rightarrow \boxed{T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1}$

3) a)

conduction électrique	conduction thermique
potentiel V	température T
$\vec{j}$ ou I	$\vec{j_Q}$ ou $\phi = \mathcal{P}_{th}$
conductivité électrique γ	conductivité thermique λ
$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$	$\phi = \mathcal{P}_{th} = \iint \vec{j_Q} \cdot \vec{dS}$
loi d'Ohm $\nearrow \vec{j} = -\gamma \vec{grad} V$ $\searrow V_1 - V_2 = RI$	loi de Fourier $\nearrow \vec{j_Q} = -\lambda \vec{grad} T$ $\searrow T_1 - T_2 = R_{th} \phi$
R	R_{th}
$R = \frac{1}{\gamma} \frac{\text{longueur}}{\text{section}}$	$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{\sigma}$

b) $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$

c) $\phi = \underbrace{-\lambda \frac{dT}{dx}}_{j_Q} \sigma = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \sigma \Rightarrow \boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{\sigma}}$

d) $\boxed{R_{th} = 2.10^2 \ K.W^{-1}}$ $\quad \mathcal{P} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \boxed{0,3 \ W = \mathcal{P}}$

4) D'après le second principe :

- l'entropie entrant à travers la section d'abscisse x est :

$$\boxed{\delta S_e = \frac{\delta Q_e(x)}{T(x)} = -\lambda \frac{\frac{dT}{dx}(x)}{T(x)} \sigma \, dt}$$

- l'entropie sortant à travers la section d'abscisse $(x+dx)$ est :

$$\boxed{\delta S_s = \frac{\delta Q_s(x+dx)}{T(x+dx)} = -\lambda \frac{\frac{dT}{dx}(x+dx)}{T(x+dx)} \sigma \, dt}$$

En généralisant à 3D : $\delta Q_e = -\lambda \, \vec{grad}\, T \, \vec{\sigma} \, dt$

$\Rightarrow \delta S_e = -\frac{\lambda \vec{grad} T}{T} \vec{\sigma} \, dt = \vec{j_S} \, \vec{\sigma} \, dt$

$\Rightarrow \boxed{\vec{j_S} = -\lambda \frac{\vec{grad} T}{T}}$

$\delta S_e - \delta S_s = j_S(x) \sigma dt - j_S(x+dx) \sigma dt = -\frac{d j_S}{dx} dx \, \sigma dt$

$\delta S_{\text{échange}}$ (reçue) $= -\frac{d j_S}{dx} d\tau \, dt$

On est en régime permanent, donc la variation d'entropie du volume $d\tau$ est nulle $\Rightarrow$ l'entropie créée est l'opposée de l'entropie d'échange.

$\delta S_c = + \frac{d j_S}{dx} d\tau \, dt$

$\Rightarrow s_c = \frac{d j_S}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{\lambda}{T} \frac{dT}{dx} \right)$

or $\frac{dT}{dx} = c^{te} = \frac{T_2 - T_1}{L}$

$$\boxed{s_c = + \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 = \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{T_1 - T_2}{L}\right)^2}$$

> 0 ! (irréversible si $T_1 \neq T_2$)

OK la diffusion thermique est un phénomène irréversible

($= 0$ si $T_1 = T_2$ donc réversible, OK il ne se passe rien !)

5) $S_c = \iiint s_c \, d\tau = \int_{x=0}^{L} s_c \, \sigma \, dx$

$S_c = \sigma \int_{x=0}^{L} \frac{d j_S}{dx} dx = \sigma \int_{j_S(0)}^{j_S(L)} d j_S$ $\quad$ (car $s_c = \frac{d j_S}{dx}$)

$S_c = \sigma \left(j_S(L) - j_S(0) \right)$

$= \sigma (-\lambda) \frac{T_2 - T_1}{L} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$

$$\boxed{S_c = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)}$$

6) On reprend le bilan du 1) avec $\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_{ext}$ (<0 si $T>T_0$ (OK cédée))

$\delta Q_{ext} = -\alpha \left(T(x)-T_0\right) d\sigma_\ell \, dt$ avec $d\sigma_\ell = 2\pi a \, dx$

$$\Rightarrow \lambda \pi a^2 dx\, dt \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha (T-T_0) 2\pi a \, dx \, dt = c\rho \pi a^2 dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\alpha}{a\lambda}(T-T_0)}$$

régime stationnaire $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2\alpha}{a\lambda}(T-T_0)}$

Si $T(x)>T_0$, $\delta Q_{ext}<0$, et la conduite cède de l'énergie à l'extérieur. Donc avec le signe $(-)$, δQ_{ext} est la chaleur reçue par la conduite (avec $\delta Q_{ext}<0$ donc).

7) $$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2\alpha}{a\lambda}T = -\frac{2\alpha}{a\lambda}T_0$$

On pose $d^2 = \frac{a\lambda}{2\alpha}$ soit $\boxed{d = \sqrt{\frac{a\lambda}{2\alpha}}}$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{d^2} = -\frac{T_0}{d^2}$$

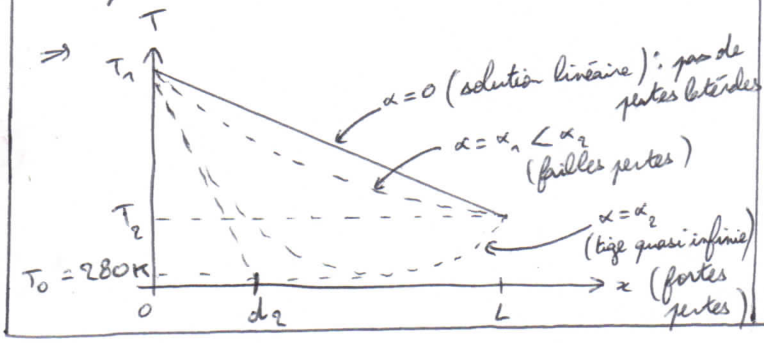
$$\Rightarrow \boxed{T(x) = T_0 + A e^{-x/d} + B e^{+x/d}}$$

conditions aux limites $\Rightarrow$ A et B

$$\boxed{\begin{array}{l} T(x=0) = T_1 = T_0 + A + B \\ T(x=L) = T_2 = T_0 + A e^{-L/d} + B e^{L/d} \end{array}}$$

* d est la longueur caractéristique des pertes thermiques le long de la tige
* AN : $\alpha_1 \Rightarrow d_1 = 5$ m
  $\alpha_2 \Rightarrow d_2 = 0{,}9$ m
* Si la tige est "infinie", c'est sur une distance de l'ordre de d que les variations de température sont significatives ($L \gg d$). Si $L \ll d$, la solution pourra être linéarisée et les pertes thermiques latérales seront négligeables.

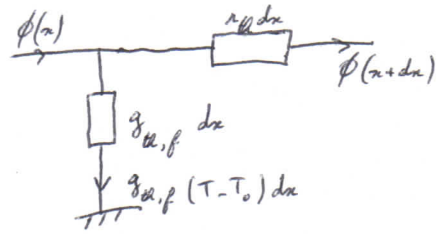
$\Rightarrow$



8)a) $\phi(x) = j_Q(x)\sigma = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_x \sigma$ = puissance thermique traversant la section d'abscisse x

Le bilan de puissance s'écrit comme une loi des noeuds :

$$\phi(x) - \phi(x+dx) - 2\pi a \alpha (T-T_0)\, dx = 0$$



On pose $\boxed{g_{th,f} = 2\pi a \alpha}$, ce qui donne une puissance thermique latérale évacuée égale à $g_{th,f}(T-T_0)\,dx$

Par analogie avec 3), $g_{th,f}$ est l'inverse d'une résistance thermique linéique, c'est à dire une conductance thermique linéique.

Quant à $\phi(x)$, il se calcule comme au 3), ce qui permet de donner la résistance thermique entre les tranches x et $x+dx$, qui vaut $\frac{1}{\lambda}\frac{dx}{\sigma}$, d'où l'existence d'une résistance thermique linéique : $\boxed{r_{th} = \frac{1}{\lambda\sigma}}$

b) AN : $r_{th} = 5.10^{1}$ K.W^{-1}.m^{-1}

$\alpha_1 \rightarrow g_{th,f1} = 8{,}8.10^{-4}$ K.W^{-1}.m^{-1}

$\alpha_2 \rightarrow g_{th,f2} = 3.10^{-2}$ K.W^{-1}.m^{-1}

c) on suppose a suffisamment petit pour appliquer les formules locales.

$\mathcal{P}'_0 = \alpha\left(T(0)-T_0\right)\sigma_\ell$ et $\mathcal{P}_0 = -\lambda \frac{dT}{dx}\sigma = -\lambda\frac{dT}{dx}\sigma_\ell$

$$\frac{\mathcal{P}'_0}{\mathcal{P}_0} = \frac{\alpha\left(T(0)-T_0\right)}{\lambda\left|\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}} = \boxed{\frac{\alpha(T_1-T_0)}{\lambda\left|\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}} = \frac{\mathcal{P}'_0}{\mathcal{P}_0}}$$

La pente $\frac{dT}{dx}$ à l'origine se lit sur la courbe.

$\Rightarrow$ * $\alpha = 0 \Rightarrow \mathcal{P}'_0 = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{P}'_0}{\mathcal{P}_0} = 0$

* $\alpha = \alpha_1 \Rightarrow \left|\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \simeq 20$ K.m^{-1} $\Rightarrow \frac{\mathcal{P}'_0}{\mathcal{P}_0} \simeq 7.10^{-3}$

* $\alpha = \alpha_2 \Rightarrow \left|\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \simeq 90$ K.m^{-1} $\Rightarrow \frac{\mathcal{P}'_0}{\mathcal{P}_0} \simeq 4.10^{-2}$

$\alpha = \alpha_1$: pertes inférieures au cas $\alpha = \alpha_2$ (cf 7)). OK

9) liquide incompressible → $\begin{cases} dH = m\,c\,dT \\ dS = m\,c\,\dfrac{dT}{T} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} h(x) = c\,T(x) + c^{te} \\ s(x) = c \ln T(x) + c^{te'} \end{array}}$

10/a) $\delta m = \rho\, d\tau = \rho \sigma v \,\delta t$ $\quad \boxed{\delta m = \rho \sigma v\, \delta t}$

(cette masse se trouve dans le cylindre de longueur $v\,\delta t$)

b) 1^er principe pour les systèmes ouverts : (l'on retrouve $D_m = \rho\sigma v$)

$$\delta m \left(h(x_2) - h(x_1)\right) = j_Q(x_1)\sigma\, dt - j_Q(x_2)\sigma\, dt + \underbrace{\delta W_i}_{\text{pas de parties mobiles}}$$

$$\Rightarrow \rho v\, h(x_2) + j_Q(x_2) = \rho v\, h(x_1) + j_Q(x_1)$$

($\delta m = \rho \sigma v \delta t$)

$$\Rightarrow \boxed{j_Q(x) + \rho v\, h(x) = c^{te}}$$

c) loi de Fourier : $j_Q = -\lambda \dfrac{dT}{dx}$

et $h(x) = c\,T(x) + c^{te}$

$$\Rightarrow \boxed{-\lambda \frac{dT}{dx} + \rho v c\, T = c^{te}}$$

11) $\boxed{D = \dfrac{\lambda}{\rho v c}}$ $\Rightarrow \dfrac{T}{D} - \dfrac{dT}{dx} = c^{te}$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = A' e^{x/D} + B'}$$

A' et B' déterminées grâce aux conditions aux limites $\begin{pmatrix} T(x=0) = T_1 \\ T(x=L) = T_2 \end{pmatrix}$

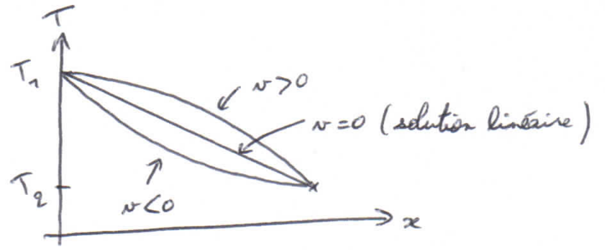
AN : $\boxed{D = 3 \cdot 10^{-7}\ m} \ll L$

* $v > 0 \Rightarrow D > 0$, or T doit décroître avec x ($T_2 < T_1$)

$\Rightarrow A' < 0$

* inversement : $v < 0 \Rightarrow A' > 0$

On en déduit les allures suivantes :



12) * en x : $\delta S_{e_v} = \delta m\, c \ln T(x) = \boxed{\rho v \sigma\, dt\, c \ln T = \delta S_{e_v}}$

$= j_{S_v}(x)\sigma\, dt$

$\Rightarrow \boxed{j_{S_v} = \rho v c \ln T}$ $\quad \boxed{\vec{j}_{S_v} = \rho v c \ln T\, \vec{e}_x}$

* en x+dx : $\boxed{\delta S_{S_v} = j_{S_v}(x+dx)\sigma\, dt = \rho v c \sigma\, dt \ln T(x+dx)}$

* 2^ème principe pour les systèmes ouverts, entre x et $x+dx$:

$$\underbrace{\delta S_{S_v}}_{\text{sortie}} - \underbrace{\delta S_{S_e}}_{\text{entrée}} = \delta S_{\text{échange diffusif}} + \delta S_{\text{créée}}$$

cf 4) : $= \delta S_{e\,\text{diffusion}} - \delta S_{s\,\text{diffusion}}$

$= j_S(x)\sigma\, dt - j_S(x+dx)\sigma\, dt$

$= -\dfrac{dj_S}{dx}\, dx\, \sigma\, dt$

$$\Rightarrow j_{S_v}(x+dx)\sigma\, dt - j_{S_v}(x)\sigma\, dt = \frac{dj_{S_v}}{dx}\, dx\,\sigma\, dt$$

$$= \underbrace{-\frac{dj_S}{dx}\, dx\,\sigma\, dt}_{\delta S_{\text{échange diffusif}}} + \underbrace{s_c\, \sigma\, dx\, dt}_{\delta S_{\text{créée}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_c = \underbrace{\frac{dj_S}{dx}}_{\text{terme diffusif}} + \underbrace{\frac{dj_{S_v}}{dx}}_{\text{terme convectif}}}$$

$$\frac{dj_S}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\lambda}{T}\frac{dT}{dx}\right) = -\frac{\lambda}{T}\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\lambda}{T^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2$$

$$j_{S_v} = \rho v c \ln T \Rightarrow \frac{dj_{S_v}}{dx} = \frac{\rho v c}{T}\frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow s_c = \underbrace{-\frac{\lambda}{T}\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\lambda}{T^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2}_{\text{terme diffusif}} + \underbrace{\frac{\rho v c}{T}\frac{dT}{dx}}_{\text{terme convectif}}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{A'}{D} e^{\frac{x}{D}} \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{A'}{D^2} e^{\frac{x}{D}}$$

$$\Rightarrow -\frac{\lambda}{T}\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\rho v c}{T}\frac{dT}{dx} = -\frac{\lambda}{T}\frac{A'}{D^2} e^{\frac{x}{D}} + \frac{\rho v c}{T}\frac{A'}{D} e^{\frac{x}{D}}$$

$$= \frac{A'}{DT}\left(-\frac{\lambda}{D} + \rho v c\right) e^{\frac{x}{D}} = 0 \text{ car } D = \frac{\lambda}{\rho v c}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_c = \frac{\lambda}{T^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2} > 0 \text{ OK irréversible}$$

(= 0 donc réversible si $T_1 = T_2$ OK)

Rq : même forme qu'en 4) !! (mais pas la même répartition de T)