KHÔLLE 1

EXERCICE 1

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $\varphi'(x)$ pour tout$x \neq 0$.
3. La φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α.

EXERCICE 3

Soit φ la fonction définie sur $]-1; 1[\setminus\{0\}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1. Déterminer les limites de φ aux bornes de son ensemble de définition.
2. Peut-on prolonger φ par continuité en 0 ?
3. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée.

KHÔLLE 1 : Eléments de correction

EXERCICE 1

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $\varphi'(x)$ pour tout$x \neq 0$.

CORRECTION :

1. Continuité sur $\mathbb{R}^*$: φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient bien défini de $x \mapsto e^{2x}-1$ et $x \mapsto x$ elles-mêmes continues sur $\mathbb{R}^*$.
   Continuité en 0 : Comme $\varphi(0) = 2$, il s'agit de mq. $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 2$.
   Pour tout $x \neq 0$, on peut écrire :
   $$\varphi(x) = 2 \times \frac{e^{2x}-1}{2x}.$$
   On pose $X = 2x$ alors $X \to 0$ lorsque $x \to 0$ et on peut conclure que
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \underbrace{\lim_{X\to 0} \frac{e^{X}-1}{X} = 1}_{\text{limite usuelle}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 2 \times 1 = 2.$$
   Ccl : φ étant continue sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0, φ est bien continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

CORRECTION :

1. Etude de fonction + théorème de la bijection ou des valeurs intermédiaires.
2. Simple ré-écriture.
3. Etude des variations de f. Pour mq. $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$, il suffit de mq. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) \in \mathbb{R}^+$. Cela se voit avec le tableau de variation de f.
   Pour la croissance de la suite $(x_n)_n$ il suffit de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x_n \leq x_{n+1}$ en utilisant la croissance de f sur $\mathbb{R}^+$.
4. $f(1/2) < 1/2$ par calcul et par récurrence on mq. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x_n < 1/2$.
5. THM de convergence monotone puis passage à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$.
   $(x_n)_n$ converge vers le point fixe α de f sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 3

Soit φ la fonction définie sur $]-1;1[\setminus\{0\}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1. Déterminer les limites de φ aux bornes de son ensemble de définition.
2. Peut-on prolonger φ par continuité en 0 ?
3. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[\setminus\{0\}$ et déterminer sa dérivée.

CORRECTION :

1. <u>Limite en -1^+</u> $\begin{cases} \ln(1+x) \to 0 \\ \ln(1-x) \to 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \varphi(x) \to 0$ par quotient.

   <u>Limite en 1^-</u> $\begin{cases} \ln(1+x) \to \ln(2) > 0 \\ \ln(1-x) \to 0^+ \end{cases} \quad \Rightarrow \varphi(x) \to +\infty$ par quotient.

   <u>Limite en 0</u> $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = \dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}}$

   Or $\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1 \\ \underbrace{\dfrac{\ln(1-x)}{x}}_{\text{poser } X=-x} = -\dfrac{\ln(1+X)}{X} \to -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \varphi(x) \to -1$ par quotient.

2. On peut prolonger φ par continuité en 0 puisque φ est continue sur son domaine de définition comme quotient bien défini de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ elles-mêmes continues sur $\mathbb{R}^*$ et que la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi(x) = -1$ est une limite finie.

3. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[\setminus\{0\}$ par quotient bien défini de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ elles-mêmes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[\setminus\{0\}$.
   De plus
   $$\forall x \in]-1;1[\setminus\{0\}, \quad \varphi'(x) = \frac{\dfrac{\ln(1-x)}{1+x} - \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}}{(\ln(1-x))^2}$$
   .