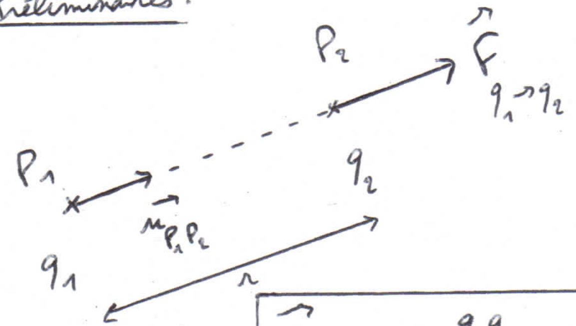
PT 2020-2021 DL5

PREMIER PROBLEME :

Les ondes gravitationnelles (d'après banque PT 2020)

A) Préliminaires :

1)



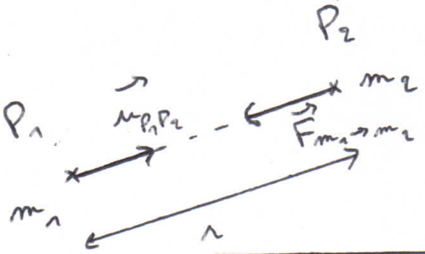
loi de Coulomb : $$\boxed{\vec{F}_{q_1 \to q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{P_1P_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{(P_1P_2)^3}}$$

($\vec{u}_{P_1P_2}$ = vecteur unitaire allant de P_1 vers P_2)

2) Théorème de Gauss : le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface fermée S est égal à la somme des charges à l'intérieur de S, divisée par la permittivité diélectrique du vide ε_0.

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

3)



loi de Newton : $$\boxed{\vec{F}_{m_1 \to m_2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{P_1P_2} = -G m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{(P_1P_2)^3}}$$

4)

$$\boxed{\begin{array}{l} q_1 \Leftrightarrow m_1 \\ q_2 \Leftrightarrow m_2 \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow -G \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \vec{E} \Leftrightarrow \vec{g} \\ Q_{int} \Leftrightarrow M_{int} \end{array}}$$

Théorème de Gauss : le flux sortant du champ gravitationnel à travers une surface fermée S est égal au produit de la masse à l'intérieur de S par la constante $(-4\pi G)$.

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{g}\cdot\vec{dS} = -4\pi G M_{int}}$$

5) * Tous les plans contenant la droite (OM) sont plans de symétrie de la distribution de masse. Or $\vec{g}$ est un vecteur polaire (mêmes propriétés que $\vec{E}$), donc $\vec{g}(M)$ appartient à tous ces plans, donc à leur intersection, donc

$\vec{g}(M) = g\,\vec{u}_r$ (on se place évidemment en coordonnées sphériques)

* Il y a invariance de la distribution de masse par toute rotation autour de O

$\Rightarrow g(r, \theta, \varphi) = g(r)$

* $\Rightarrow \vec{g}(M) = g(r)\vec{u}_r$

* choix de la surface de Gauss : sphère de centre O de rayon r :

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{g}\cdot\vec{dS} = \oint\!\!\!\oint_S g(r)\vec{u}_r\cdot(+dS\,\vec{u}_r) = g(r)\oint\!\!\!\oint_S dS = g(r)\,4\pi r^2$$

$r = c^{te}$ sur S

* thm de Gauss : $\oint\!\!\!\oint_S \vec{g}\cdot\vec{dS} = -4\pi G M_{int}$

$$\Rightarrow \vec{g} = -\frac{G M_{int}}{r^2}\vec{u}_r$$

* A présent, pour $r > R$: $M_{int} = m$

$$\Rightarrow \vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u_r}$$

or $\vec{u_r} = \frac{\vec{OM}}{OM}$ et $r = OM$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g}(M) = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u_r} = -\frac{Gm}{OM^3}\vec{OM}}$$

<u>On retrouve le champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle de masse m située en O.</u>

car d'après la loi de Newton :

$O_\times$ m $\quad {}_\times M$ m'

$$\vec{F}_{m\to m'} = -\frac{Gmm'}{OM^3}\vec{OM} = m'\vec{g}(M)$$

$$\Rightarrow \vec{g}(M) = -\frac{Gm}{OM^3}\vec{OM}$$

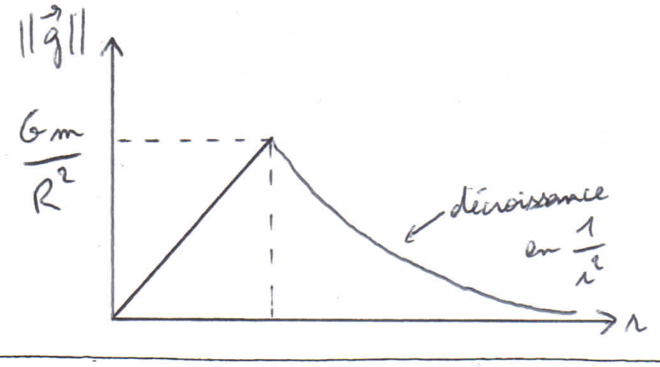
6) On a toujours $\vec{g} = -\frac{GM_{int}}{r^2}\vec{u_r}$

$$M_{int} = \iiint_{\substack{\text{boule} \\ \text{de rayon } r}} \rho\, d\tau \quad \text{avec } \rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

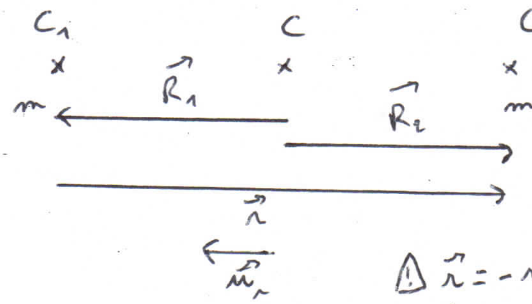
$$= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,\frac{4}{3}\pi r^3 = m\frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g}(M) = -\frac{Gmr}{R^3}\vec{u_r} = -\frac{Gm}{R^3}\vec{OM}}$$

7)



B) <u>Description mécanique du système :</u>



⚠ $\vec{r} = -r\vec{u_r}$ ... !!
(pas malin !)

8) C est le centre d'inertie, or $m_1 = m_2 = m$

$\Rightarrow$ C est au milieu du segment $[C_1C_2]$

$\Rightarrow \vec{R_2} = -\vec{R_1}$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{C_1C_2} = \vec{C_1C} + \vec{CC_2} = -\vec{R_1} + \vec{R_2} = -2\vec{R_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R_1} = -\frac{1}{2}\vec{r}}$$

9) système C_1

référentiel d'étude galiléen de centre C

action sur C_1 : $\vec{F}_{C_2\to C_1} \underset{\uparrow}{=} \frac{Gm^2}{r^3}\vec{r}$

loi de Newton

théorème du moment dynamique en C :

$$\frac{d\vec{\sigma}(C)}{dt} + m\underbrace{\vec{v}(C)}_{\vec{0}}\wedge\underbrace{\vec{v}(C)}_{\vec{0}} = \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{F}_{C_2\to C_1})$$

$$= \vec{CC_1}\wedge\vec{F}_{C_2\to C_1} = \vec{0}$$

colinéaires

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(C) = \vec{c^{te}} = \vec{CC_1}\wedge m\vec{v}(C_1)$$

$\Rightarrow \vec{v}(C_1)$ reste $\perp$ à $\vec{\sigma}(C) = \vec{c^{te}}$

$\Rightarrow$ <u>le mouvement de C_1 est plan.</u>

10) $r = c^{te} \Rightarrow R_1 = \frac{r}{2} = c^{te}$

$\Rightarrow$ le mouvement est <u>circulaire</u>.

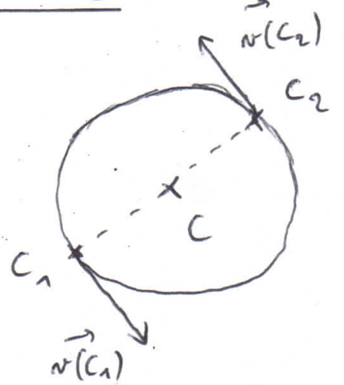
$\Rightarrow \vec{v}(C_1) \perp \vec{CC_1}$

$\vec{\sigma}(C) = \vec{c^{te}} \Rightarrow \|\vec{\sigma}(C)\| = c^{te}$

$$\Rightarrow \underbrace{\|\vec{CC_1}\|}_{R_1 = c^{te}} \times \underbrace{m}_{m = c^{te}} \|\vec{v}(C_1)\| \times \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = c^{te}$$

$\Rightarrow \|\vec{v}(C_1)\| = c^{te} \Rightarrow$ <u>mouvement uniforme</u>

11) <u>C_1 décrit un mouvement circulaire uniforme autour de C.</u>



($\|\vec{v}(C_1)\| = \|\vec{v}(C_2)\|$ par conservation de la quantité de mouvement du système isolé constitué de C_1 et C_2 : $m\vec{v}(C_1) + m\vec{v}(C_2) = (2m)\vec{v}(C) = \vec{c^{te}} = \vec{0}$)

12) $\vec{CC_1} = R_1 \vec{u_r}$ $\quad C = \underline{\text{centre de masse}}$ $\quad$ référentiel de centre C

$$\vec{v}(C_1) = \frac{d\vec{CC_1}}{dt} = \underbrace{\cancel{\dot{R}_1}}_{R_1 = c^{te}} \vec{u_r} + R_1 \dot{\theta} \vec{u_\theta}$$

$$\vec{a}(C_1) = \underbrace{\cancel{\dot{R}_1}}_{R_1 = c^{te}} \dot{\theta} \vec{u_\theta} + R_1 \underbrace{\cancel{\ddot{\theta}}}_{\dot{\theta} = c^{te} \text{ car } \|\vec{v}(C_1)\| = c^{te}} \vec{u_\theta} - R_1 \dot{\theta}^2 \vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(C_1) = -\frac{\|\vec{v}(C_1)\|^2}{R_1} \vec{u_r}$$

RFD à C_1 : $m\vec{a}(C_1) = \vec{F}_{C_2 \to C_1}$

$$\Rightarrow -m \frac{\|\vec{v}(C_1)\|^2}{R_1} \vec{u_r} = \frac{Gm^2}{r^3} \vec{r}$$

$$-m \frac{v_1^2}{\frac{r}{2}} \vec{u_r} = \frac{Gm^2}{r^3} (-r\vec{u_r})$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{Gm}{2r}}$$

Soit $T = \frac{1}{f}$ le temps mis pour faire un tour

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T} = 2\pi \frac{r}{2} f = \pi r f$$

$$\Rightarrow f = \frac{v_1}{\pi r} \Rightarrow \boxed{f = \sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 r^3}}}$$

13) $\delta W = \vec{F}_{C_1 \to C_2} \cdot \vec{dl} = \vec{F}_{C_1 \to C_2} \cdot \vec{dr}$

$\vec{r} = -r\vec{u_r}$ ... pas malin !

$$= \frac{Gm^2}{r^2} \vec{u_r} \cdot (-dr\,\vec{u_r}) = -Gm^2 \frac{dr}{r^2}$$

$$= -d\left(-\frac{Gm^2}{r}\right) = -dE_{pot}$$

$$\Rightarrow E_{pot} = -\frac{Gm^2}{r} + \underbrace{\cancel{c^{te}}}_{E_{pot}(r \to \infty) = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{pot} = \frac{-Gm^2}{r}}$$

14) A la question 12), on a établi $v_1 = \sqrt{\frac{Gm}{2r}}$

$$E_{C_1} = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow \boxed{E_{C_1} = \frac{Gm^2}{4r}}$$

15) $\underset{m_2 = m_1 = m}{v_2 = v_1} \Rightarrow E_{C_2} = E_{C_1}$

(cf 11) : $v_2 = v_1$)

$$\Rightarrow E_m = E_{C_1} + E_{C_2} + E_{pot}$$

$$= 2\frac{Gm^2}{4r} - \frac{Gm^2}{r} = -\frac{Gm^2}{2r}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{Gm^2}{2r}}$$

$r = c^{te} \Rightarrow E_m = c^{te}$

ou bien, de manière plus physique :

Le système $\{C_1 + C_2\}$ est isolé, et les forces internes ($\vec{F}_{C_1 \to C_2}$ et $\vec{F}_{C_2 \to C_1}$) sont conservatives ($\vec{F} \perp \vec{v}$)

$\Rightarrow \boxed{E_m = c^{te}}$

16) $$-\alpha f^{2/3} = -\left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3} \left(\sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 r^3}}\right)^{2/3}$$

$$= -\frac{\cancel{\pi^{2/3}}\, G^{2/3}\, m^{5/3}\, G^{1/3}\, m^{1/3}}{2^{2/3} \cdot 2^{1/3}\, \cancel{\pi^{2/3}}\, r}$$

$$= -\frac{Gm^2}{2r} = E_m \qquad \text{CQFD}$$

$$\boxed{E_m = -\alpha f^{2/3}} \quad \text{où} \quad \boxed{\alpha = \left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}}$$

* α en $\left([M]^{-1}[L]^3[T]^{-2}\right)^{2/3} [M]^{5/3}$

$$= [M][L]^2[T]^{-\frac{4}{3}}$$

$f^{2/3}$ en $\left([T]^{-1}\right)^{2/3}$

$\Rightarrow -\alpha f^{2/3}$ en $[M][L]^2[T]^{-4/3}[T]^{-2/3}$

$$[M][L]^2[T]^{-2}$$

* énergie = force × distance

= masse × accélération × distance

en $[M] \times [L][T]^{-2} \times [L]$

$= [M][L]^2[T]^{-2}$

$\Rightarrow$ homogénéité OK

c) Prise en compte de l'émission d'ondes gravitationnelles :

17) $$E_m(t) = -\frac{Gm^2}{2r(t)} \searrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r(t) \searrow \text{ au cours du temps}}$$

($\Delta E_m < 0$)

$$f(t) = \sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 r^3(t)}} \nearrow \qquad (r(t) \searrow)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) \nearrow \text{ au cours du temps}}$$

18) Pendant la durée dt, l'énergie mécanique perdue correspond à l'énergie libérée à cause des ondes gravitationnelles.

$$\Rightarrow \underset{\text{perdue}}{-}\, \underset{(<0)}{dE_m} = P(t)\,dt$$

$$\Rightarrow -\frac{dE_m}{dt} = P(t)$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt}\left(-\alpha f^{2/3}\right) = \alpha \frac{2}{3} f^{-\frac{1}{3}} \frac{df}{dt}$$

$$= P(t) = \frac{64}{5} \frac{G^4 m^5}{c^5 r^5}$$

or $f = \sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 r^3}} \Rightarrow f^2 \propto \frac{1}{r^3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^5} \propto f^{\frac{10}{3}}$$

$$\Rightarrow f^{-\frac{1}{3}} \frac{df}{dt} \propto \frac{1}{r^5} \propto f^{\frac{10}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dt} = K f^{\frac{11}{3}}} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{11}{3}}$$

19) $$\frac{df}{f^{\frac{11}{3}}} = K\,dt$$

$$-\frac{3}{8}\left[f^{-\frac{8}{3}}\right]_{f_0}^{f(t)} = Kt$$

$$f(t)^{-\frac{8}{3}} - f_0^{-\frac{8}{3}} = -\frac{8}{3}Kt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(t)}{f_0}\right)^{-\frac{8}{3}} - 1 = -\frac{8}{3} K f_0^{\frac{8}{3}} t$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(t)}{f_0}\right)^{+\frac{8}{3}} = \left(1 - \frac{8}{3} K f_0^{\frac{8}{3}} t\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{8}{3} K f_0^{\frac{8}{3}} t\right)^{3/8}}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{3/8}}$$

avec $\boxed{\tau = \frac{3}{8 K f_0^{\frac{8}{3}}}}$

20) Pour $t \to \tau$, $f(t) \to \infty$, $r(t) \to 0$.

Il y a alors collision entre les 2 corps, et fusion des 2 corps.

τ est donc le temps au bout duquel il y aura fusion des 2 corps.

A cet instant, $P(t) \propto \frac{1}{r(t)^5} \to \infty$

A $t = \tau$, l'émission des ondes gravitationnelles est très intense (détectable depuis la Terre)

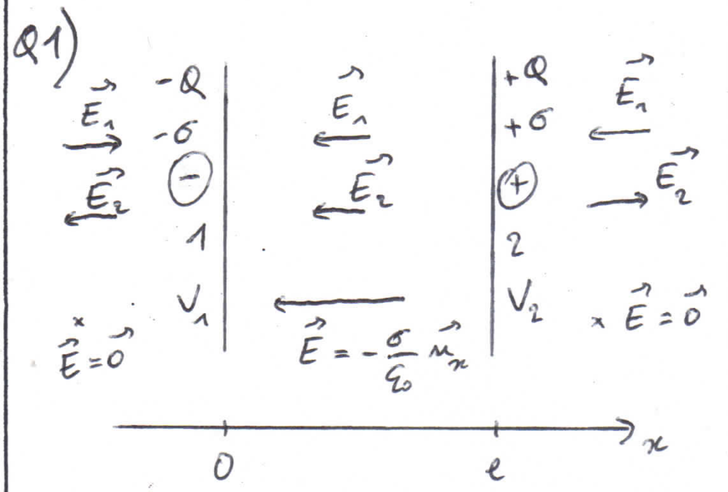
PT 2020 - 2021 DLS

DEUXIEME PROBLEME :

Etude d'un microphone (d'après banque PT 2020)

LE CONDENSATEUR PLAN (20%)

Q1)



* champ électrostatique créé par la plaque en $x=0$:

Pour $x<0$: $\vec{E_1} = -\dfrac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$

Pour $x>0$: $\vec{E_1} = +\dfrac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$

* champ électrostatique créé par la plaque en $x=e$:

Pour $x<e$: $\vec{E_2} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$

Pour $x>e$: $\vec{E_2} = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$

* D'après le principe de superposition, le champ électrostatique créé par les 2 plaques vaut $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } 0<x<e : \vec{E} = \dfrac{-\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x} \\ \text{Pour } x<0 \text{ et } x>e : \vec{E} = \vec{0}\end{array}}$$

Q2) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V$ (car en régime permanent, l'équation de Maxwell-Faraday est $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$)

$\Rightarrow dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} = -E\vec{u_x}\cdot(dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z})$

$= -E\,dx$

* Pour $0<x<e$: $E = \dfrac{-\sigma}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow dV = -E\,dx = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}dx$

$\Rightarrow V = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}x + c^{te} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}x + \underbrace{V(x=0)}_{0 \text{ (choix)}}$

* Pour $x<0$ et $x>e$: $E=0$

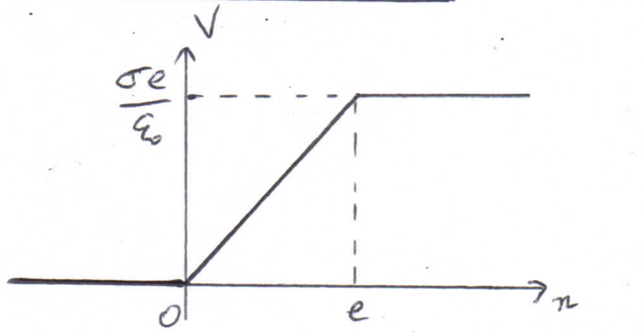
$\Rightarrow dV = 0 \Rightarrow V = c^{te}$

$\Rightarrow V(x<0) \underset{\uparrow}{=} V(x=0) = 0$

continuité du potentiel

et $V(x>e) = V(x=e) = \dfrac{\sigma e}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} V(x\leq 0) = 0 \\ V(0\leq x\leq e) = \dfrac{\sigma x}{\varepsilon_0} \\ V(x\geq e) = \dfrac{\sigma e}{\varepsilon_0}\end{array}}$$



Q3) $U = V_2 - V_1 = V(x=e) - V(x=0)$

$\Rightarrow \boxed{U = \dfrac{\sigma e}{\varepsilon_0}}$

Q4) $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\sigma S}{\frac{\sigma e}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}}$

Q5) $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e} \simeq \dfrac{10^{-11} \times 1.10^{-4}}{10.10^{-6}}$

$\Rightarrow \boxed{C \simeq 10^{-10}\,\mathrm{F} \simeq 0{,}1\,\mathrm{nF}}$

Q6) $w_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{S^2}$

$\boxed{w_e = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}}$

$E_e = \iiint_{\text{condensateur}} w_e \, d\tau = w_e \times (S e)$

$\Rightarrow \boxed{E_e = \dfrac{Q^2 e}{2\varepsilon_0 S}}$

Rq : $E_e = \dfrac{Q^2}{2C}$ OK résultat connu. $\left(E_e = \frac{1}{2}CU^2 \text{ et } U = \frac{Q}{C}\right)$

Q7) $\Delta E_e = \Delta\left(\dfrac{Q^2 e}{2\varepsilon_0 S}\right) = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta e$

$\Rightarrow \boxed{\Delta E_e = \dfrac{Q^2 \Delta x}{2\varepsilon_0 S}}$

Q8) $W = \int \vec{f}\cdot\vec{d\ell} = \int f\,\vec{u_x}\cdot(dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z})$

$= \int f\,dx = f\,\Delta x$

$= \Delta E_e = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta x$

$\Rightarrow \boxed{f = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}}$

Q9) système : plaque en $x = e$

référentiel terrestre supposé galiléen

actions extérieures : $\vec{f}$, $\vec{f_{él}}$

équilibre $\Rightarrow \vec{f} + \vec{f_{él}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f_{él}} = -\vec{f}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{f_{él}} = -\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\vec{u_x}}$ $\propto -\vec{u_x}$ OK attractive

CIRCUIT ELECTRIQUE (10%)

Q10) $\vec{f_{él}} = -\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\vec{u_x} = -\dfrac{(Q_0+q)^2}{2\varepsilon_0 S}\vec{u_x}$

$\vec{f_{él}} = -\dfrac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 S}\left(1+\dfrac{q}{Q_0}\right)^2\vec{u_x}$

$= \vec{f_{él0}}\left(1+\dfrac{q}{Q_0}\right)^2$

or $q \ll Q_0 \Rightarrow \left(1+\dfrac{q}{Q_0}\right)^2 \underset{\text{DL}}{\simeq} \left(1+2\dfrac{q}{Q_0}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{f_{él}} = \vec{f_{él0}}\left(1+2\dfrac{q}{Q_0}\right)}$

Q11) $u_c = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{Q_0+q}{\frac{\varepsilon_0 S}{e+\Delta x}} = \dfrac{(Q_0+q)(e+\Delta x)}{\varepsilon_0 S}$

$u_c = \dfrac{Q_0\left(1+\frac{q}{Q_0}\right)e\left(1+\frac{\Delta x}{e}\right)}{\varepsilon_0 S}$

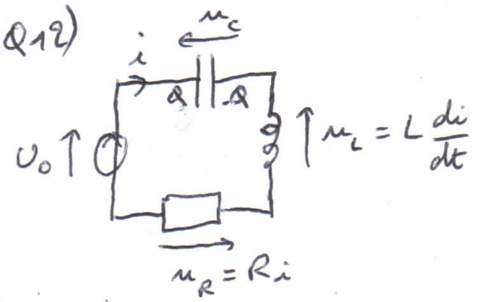
$= \dfrac{Q_0}{\frac{\varepsilon_0 S}{e}}\left(1+\dfrac{q}{Q_0}\right)\left(1+\dfrac{\Delta x}{e}\right)$

$\boxed{u_c = \dfrac{Q_0}{C_0}\left(1+\dfrac{q}{Q_0}\right)\left(1+\dfrac{\Delta x}{e}\right)}$

$u_c = \dfrac{Q_0}{C_0}\left(1+\dfrac{q}{Q_0}+\dfrac{\Delta x}{e}+\cancel{\dfrac{q}{Q_0}\dfrac{\Delta x}{e}}\right)$

$\Rightarrow \boxed{u_c = \dfrac{Q_0}{C_0}\left(1+\dfrac{q}{Q_0}+\dfrac{\Delta x}{e}\right)}$

Q12)



convention récepteur : $i = +\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(Q_0+q)$

or $Q_0 = c^{te} \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$

$u_L = +L\frac{di}{dt} \Rightarrow u_L = L\frac{d^2q}{dt^2}$

$u_R = +Ri \Rightarrow u_R = R\frac{dq}{dt}$

loi des mailles : $U_0 = u_C + u_L + u_R$

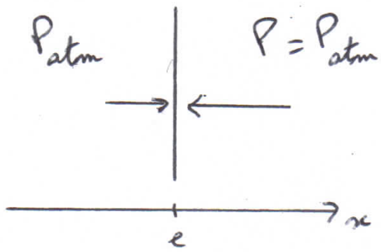
$$\Rightarrow U_0 = \frac{Q_0}{C_0}\left(1+\frac{q}{Q_0}+\frac{\Delta x}{e}\right) + L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC_0}q = \frac{1}{L}\left(U_0 - \frac{Q_0}{C_0}\right) - \frac{Q_0}{LC_0}\frac{\Delta x}{e}}$$

Si $U_0 = \frac{Q_0}{C_0}$:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC_0}q = -\frac{Q_0}{LC_0}\frac{\Delta x}{e}}$$

Q13)



$$\vec f_{press} = +P_{atm} S \vec u_x - (P_{atm}+p)S\vec u_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec f_{press} = -pS\vec u_x}$$

Q14) système : armature mobile en $x = e$

référentiel terrestre supposé galiléen

actions extérieures : $\vec f_{élo}$ (mais compensée), $\frac{2q}{Q_0}\vec f_{élo}$, $\vec f_{press}$, $\vec T$, $\vec f_{am}$

$$\Rightarrow m\vec a = m\frac{d^2(e+\Delta x)}{dt^2}\vec u_x \underset{e=c^{te}}{=} m\frac{d^2(\Delta x)}{dt^2}\vec u_x$$

$$\underset{RFD}{=} \frac{2q}{Q_0}\underbrace{\vec f_{élo}}_{-\frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 S}\vec u_x} - pS\vec u_x - k\Delta x\vec u_x - \lambda\frac{d(\Delta x)}{dt}\vec u_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2(\Delta x)}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{d(\Delta x)}{dt} + \frac{k}{m}\Delta x = -\frac{S}{m}p - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S m}q}$$

REPONSE AU REGIME SINUSOÏDAL FORCE

(10%)

Q15) * Grâce à l'analyse de Fourier (transformée de Fourier), on peut écrire qu'un signal réel est une somme de sinusoïdes (intégrale).

* Le système étudié est linéaire, on peut donc appliquer le principe de superposition.

* D'où l'intérêt d'étudier la réponse à une excitation sinusoïdale.

Q16) $\boxed{\underline{q}\left(-\omega^2+\frac{R}{L}j\omega+\frac{1}{LC_0}\right) = -\frac{Q_0}{LC_0 e}\underline{\Delta x}}$

$\left(\frac{d}{dt} \Leftrightarrow \times j\omega\right)$

$$\boxed{\underline{\Delta x}\left(-\omega^2+\frac{\lambda}{m}j\omega+\frac{k}{m}\right) = -\frac{S}{m}\underline{p} - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S m}\underline{q}}$$

Q17) On extrait $\underline{\Delta x}$ de l'équation mécanique, et on l'injecte dans l'équation électrique :

$$\underline{q}\left(-\omega^2+\frac{R}{L}j\omega+\frac{1}{LC_0}\right)\left(-m\omega^2+j\lambda\omega+k\right) = +\frac{Q_0}{LC_0 e}\left(S\underline{p} + \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S}\underline{q}\right)$$

$\times\frac{L}{j\omega}$ $$\underline{q}\left(R+j\left(L\omega-\frac{1}{C_0\omega}\right)\right)\left(-m\omega^2+j\lambda\omega+k\right) = \frac{Q_0 S}{j\omega C_0 e}\underline{p} + \frac{Q_0^2}{j\omega C_0 e\varepsilon_0 S}\underline{q}$$

On pose $\underline{Z_0} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C_0\omega}\right)$

(c'est l'impédance quand il n'y a pas de surpression)

$\times \frac{j\omega C_0 e}{Q_0 S}$

$$\Rightarrow \underline{q}\,\underline{Z_0}\,\frac{j\omega C_0 e}{Q_0 S}\left(-m\omega^2 + jd\omega + k\right)$$

$$- \underline{q}\,\frac{Q_0}{\varepsilon_0 S^2} = \underline{p}$$

$$\Rightarrow \underline{q}\left(\underline{Z_0}\,\underline{A} - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S^2}\right) = \underline{p}$$

$$\Rightarrow \underline{A}\,\underline{q}\left(\underline{Z_0} - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S^2 \underline{A}}\right) = \underline{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}\,\underline{q} = \frac{\underline{p}}{\underline{Z}}}$$

avec $\underline{Z} = \underline{Z_0} - \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S^2 \underline{A}} = \underline{Z_0} + \underline{Z_m}$

$$\Rightarrow \underline{Z_m} = -\frac{Q_0}{\varepsilon_0 S^2 \underline{A}} = \frac{-Q_0}{\varepsilon_0 S^2}\,\frac{Q_0 S}{j\omega C_0 e} \times \frac{1}{(-m\omega^2 + jd\omega + k)}$$

$$\underline{Z_m} = \frac{-Q_0^2}{\varepsilon_0 S e C_0\, j\omega\left(-m\omega^2 + jd\omega + k\right)}$$

or $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \Rightarrow \varepsilon_0 S = C_0 e$

$$\Rightarrow \underline{Z_m} = \frac{Q_0^2}{C_0^2 e^2 \omega^2}\,\frac{1}{\left(jm\omega + d + \frac{k}{j\omega}\right)}$$

CQFD !!

Q18) $\frac{1}{\underline{Z_m}} = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega} + jC_m\omega$

en //

or $\frac{1}{\underline{Z_m}} = \frac{C_0^2 e^2 \omega^2}{Q_0^2}\left(d + \frac{k}{j\omega} + jm\omega\right)$

On identifie :
$$\begin{cases} \frac{1}{R_m} = \frac{C_0^2 e^2 \omega^2}{Q_0^2}\, d \\ \frac{1}{L_m} = \frac{C_0^2 e^2 \omega^2}{Q_0^2}\, k \\ C_m = \frac{C_0^2 e^2 \omega^2}{Q_0^2}\, m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_m = \frac{Q_0^2}{C_0^2 e^2 \omega^2 d} \qquad L_m = \frac{Q_0^2}{C_0^2 e^2 \omega^2 k} \qquad C_m = \frac{C_0^2 e^2 \omega^2 m}{Q_0^2}}$$

Q19) Sans surpression, il n'y a pas de courant en régime permanent ⇒ le courant $i(t)$ sera l'image de la surpression $p(t)$.

⇒ il suffit de visualiser la tension aux bornes de la résistance R pour avoir l'image de l'intensité (loi d'Ohm : $u_R = Ri$), donc de la surpression.

PT 2020-2021 DLS

TROISIEME PROBLEME : *Electrostatique*

Partie I : Conducteur cylindrique :

I-1) Le flux sortant du champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S est égal au rapport de la charge contenue dans S par la permittivité du vide ε_0.

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

I-2) $\boxed{Q_1 = \sigma_1\, 2\pi R_1 \ell}$

($2\pi R_1 \ell$ = surface latérale du cylindre de rayon R_1 et de longueur ℓ).

I-3) * le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charges. Or $\vec{E}$ est un vecteur polaire $\Rightarrow \vec{E}(M) \in$ à ce plan

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r\vec{u_r} + \cancel{E_\theta}\,\vec{u_\theta} + E_z\vec{u_z}$$

* le plan contenant M et $\perp (Oz)$ est plan de symétrie de la distribution de charges. Or $\vec{E}$ est un vecteur polaire $\Rightarrow \vec{E}(M) \in$ à ce plan ($L \gg R_1$ on néglige les effets de bord)

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r\vec{u_r} + E_\theta\vec{u_\theta} + \cancel{E_z}\,\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E\,\vec{u_r}}$$

* on a invariance de la distribution de charges par
| rotation autour de (Oz) $\Rightarrow E(r, \cancel{\theta}, z)$
| translation suivant $\vec{u_z}$ $\Rightarrow E(r, \theta, \cancel{z})$ $(L \gg R_1)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}}$$

I-4) $$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{\substack{base\\inf}} \cancel{\vec{E}\cdot\vec{dS}} + \iint_{\substack{base\\sup}} \cancel{\vec{E}\cdot\vec{dS}}$$

$\propto \vec{u_r}$ $\propto -\vec{u_z}$ $\propto \vec{u_r}$ $\propto \vec{u_z}$

$$= \iint_{S_{lat}} E_r(r)\,\vec{u_r}\,dS\,\vec{u_r} = \iint_{S_{lat}} E_r(r)\,dS = E_r(r)\iint_{S_{lat}} dS$$

$r = c^{te}$ sur S_{lat}

$$\Rightarrow \boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = 2\pi r \ell\, E_r(r)}$$

I-5-a) $2\pi r\ell\, E_r(r) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}\,\vec{u_r}} \quad (r > R_1)$$

I-5-b) $r < R_1$: $Q_{int} = 0$ $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ $(r < R_1)$

Partie II : Condensateur cylindrique :

II-1-a) $\vec{E}$ est inchangé (Q_{int} est inchangé)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{pour } r < R_1 \\ \vec{E} = \dfrac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}\,\vec{u_r} = \dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r}\,\vec{u_r} \quad \text{pour } R_1 < r < R_2 \end{array}}$$

II-1-b) $\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = 2\pi r\ell\, E_r(r)$

$$Q_{int} = Q_1 + Q_2 = 2\pi R_1\ell\sigma_1 + 2\pi R_2\ell\sigma_2 = 2\pi\ell\,(R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q_1+Q_2}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}\,\vec{u_r} = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0 r}\,\vec{u_r} \quad \text{pour } r > R_2}$$

II-2) $\left.\begin{array}{l}\vec{j} = \vec{0}\\ \vec{j} = \gamma\vec{E}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0} \quad \text{pour } r > R_2}$

II-3) $\vec{E} = \dfrac{Q_1+Q_2}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}\,\vec{u_r} = \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{Q_2 = -Q_1}$ (les armatures d'un condensateur portent des charges opposées).

II-4) $V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dV = \int_2^1 \vec{grad}\, V \cdot \vec{dl} \underset{\vec{E} = -\vec{grad}\, V}{=} \int_2^1 -\vec{E}\cdot\vec{dl}$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_1^2 \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r l}\,\vec{u_r}\cdot\left(dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + dz\,\vec{u_z}\right)$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r} = \boxed{\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_2}{R_1} = V_1 - V_2}$$

II-5) $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$ par définition

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

II-6) $\Gamma = \frac{C}{l} \Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$

$$\Gamma = \frac{2\pi\times 9.10^{-12}}{\ln 5} = \frac{18\pi\,10^{-12}}{1,6} = \boxed{4.10^{-11}\,F.m^{-1} = \Gamma}$$

Partie III : Electromètre cylindrique :

III-1) $\boxed{E_p = \frac{Q_1^2}{2C}}$ $\left(E_p = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 \text{ avec } U = V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{C}\right)$

III-2) $E_p = \frac{Q_1^2}{2\Gamma l} \underset{Q_1 = c^{te}}{\Rightarrow} \boxed{dE_p = -\frac{Q_1^2}{2\Gamma}\frac{dl}{l^2}}$

$$\delta W = -dE_p = +\frac{Q_1^2}{2\Gamma}\frac{dl}{l^2}$$

or $Q_1 = C(V_1 - V_2) = \Gamma l (V_1 - V_2) \Rightarrow \frac{Q_1}{l} = \Gamma(V_1 - V_2)$

$$\Rightarrow \boxed{\delta W = \frac{\Gamma}{2}(V_1 - V_2)^2\, dl}$$

III-3) $\delta W = \vec{F_1}\cdot\vec{dl} = F_{1z}\,\vec{u_z}\cdot(\underset{\text{déplacement vers le bas}}{-}dl\,\vec{u_z}) = -F_{1z}\,dl$

$$\Rightarrow \boxed{F_{1z} = -\frac{\Gamma}{2}(V_1 - V_2)^2} \qquad \uparrow z$$

III-4) $\underbrace{\vec{F_1} + (m - \Delta m)\vec{g}}_{\text{plateau gauche}} = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{plateau droit}}$

$$\Rightarrow \vec{F_1} = \Delta m\,\vec{g} \Rightarrow F_{1z} = -\Delta m\, g$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 - V_2 = \sqrt{\frac{2\Delta m\, g}{\Gamma}}}$$

III-5) $V_1 - V_2 = \sqrt{\frac{2\times 0,1.10^{-3}\times 10}{4.10^{-11}}} = \sqrt{\frac{2}{4}10^8}$

$$= \frac{10^4}{\sqrt{2}} = 0,7.10^4\,V$$

$$\boxed{V_1 - V_2 = 7.10^3\,V}$$

III-6) Le montage proposé permet une mesure statique basée sur l'équilibre de la balance. Il n'est donc pas adapté à la mesure d'une tension alternative.

Partie IV : Montage hétéro-statique symétrique

IV-1) cf III-3) :

* sur la partie inférieure du conducteur (1) s'exerce la force : $F_{1z} = -\frac{\Gamma}{2}\left(u - \left(-\frac{V}{2}\right)\right)^2 = -\frac{\Gamma}{2}\left(u + \frac{V}{2}\right)^2$

* sur la partie supérieure du conducteur (1) s'exerce la force : $F'_{1z} = +\frac{\Gamma}{2}\left(u - \frac{V}{2}\right)^2$

* $\Rightarrow F_z = F_{1z} + F'_{1z} = -\frac{\Gamma}{2}\left(u + \frac{V}{2}\right)^2 + \frac{\Gamma}{2}\left(u - \frac{V}{2}\right)^2$

$$= -\frac{\Gamma}{2}\left(u^2 + \frac{V^2}{4} + uV\right) + \frac{\Gamma}{2}\left(u^2 + \frac{V^2}{4} - uV\right)$$

$$\Rightarrow F_z = -\Gamma u V$$

* équilibre de la balance : $F_z = -\Delta m\, g$

$$\Rightarrow \Gamma u V = \Delta m\, g$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{\Delta m\, g}{\Gamma V}} \propto \Delta m \Rightarrow \text{réponse linéaire}$$

$$u = \frac{\Delta m\, g}{\Gamma V} \Rightarrow \frac{\Delta u}{u} = \sqrt{\left(\frac{\Delta(\Delta m)}{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2}$$

$\Rightarrow$ l'erreur relative $\frac{\Delta u}{u}$ sur la mesure de u fait intervenir l'erreur relative $\frac{\Delta V}{V}$ liée à la tension auxiliaire $V \Rightarrow$ la sensibilité de la mesure dépend de la tension auxiliaire V.

IV-2) $$u = \frac{\Delta m\, g}{\Gamma V} = \frac{1.10^{-6} \times 10}{4.10^{-11} \times 1.10^{3}} = \frac{10^3}{4}$$

$$\boxed{u = 3.10^2\ V}$$

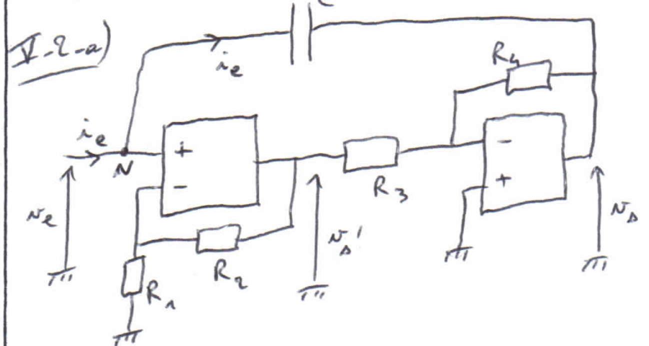
Partie V : Dipôle équivalent à un condensateur :

V-1) * Pour le 1er ALI, il y a une boucle de rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse $\ominus$ par la résistance R_2.

* Pour le 2nd ALI, il y a une boucle de rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse $\ominus$ par la résistance R_4.

* La présence de ces rétroactions sur les bornes inverseuses est un indice de fonctionnement en régime linéaire.

V-2-a)



* ALI idéaux $\Rightarrow i^+ = i^- = 0$
* régime linéaire $\Rightarrow \underline{V}^+ = \underline{V}^-$ (car ALI de gain ∞)
* 1er ALI : $\underline{V}^+ = \underline{v_e} = \underline{V}^- = \frac{R_1}{R_1+R_2}\underline{v_s'}$

diviseur de tension ($i^- = 0$)

$$\Rightarrow \underline{v_e} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\underline{v_s'} \qquad (1)$$

* 2ème ALI : $V^+ = 0 = V^-$

$$i^- = 0 \Rightarrow \frac{\underline{v_s'} - \cancel{V^-}}{R_3} + \frac{\underline{v_s} - \cancel{V^-}}{R_4} = 0 \Rightarrow \frac{\underline{v_s'}}{R_3} + \frac{\underline{v_s}}{R_4} = 0 \quad (2)$$

loi des noeuds

* loi des noeuds en N : $\underline{i_e} = (\underline{v_e} - \underline{v_s})\, jC\omega \quad (3)$

or (2) $\Rightarrow \underline{v_s} = -\frac{R_4}{R_3}\underline{v_s'} = -\frac{R_4}{R_3}\frac{R_1+R_2}{R_1}\underline{v_e}$

(1)

On injecte dans (3) : $\underline{i_e} = \underline{v_e}\, jC\omega\left(1 + \frac{(R_1+R_2)R_4}{R_1R_3}\right)$

$$\boxed{\underline{Z_e} = \frac{\underline{v_e}}{\underline{i_e}} = \frac{1}{jC\left(1 + \frac{(R_1+R_2)R_4}{R_1R_3}\right)\omega}}$$

V-2-b) $\underline{Z_e} = \frac{1}{jC_e\omega}$

avec $\boxed{C_e = C\left(1 + \frac{(R_1+R_2)R_4}{R_1R_3}\right)}$

V-2-c) $\frac{(R_1+R_2)R_4}{R_1R_3} > 0 \Rightarrow \boxed{C_e > C}$

$\Rightarrow$ on simule ainsi un condensateur de plus grande capacité.

On peut prendre $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 \Rightarrow C_e = 3C$.