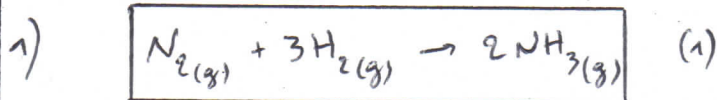


PREMIER PROBLEME:

La chimie de l'azote: Quelques applications industrielles (d'après banque PT 2020)

1) Synthèse de l'ammoniac:

$$2) \quad \boxed{\Delta_f H^\circ(\text{N}_{2(g)}) = \Delta_f H^\circ(\text{H}_{2(g)}) = 0}$$

car $\text{N}_{2(g)}$ et $\text{H}_{2(g)}$ sont les états standard de référence (pour l'élément N et l'élément H) à 298 K. Ce sont les corps les plus simples les plus stables à 298 K.

$$3) \quad \Delta_r H^\circ = 2 \Delta_f H^\circ(\text{NH}_{3(g)}) - \Delta_f H^\circ(\text{N}_{2(g)}) - 3 \Delta_f H^\circ(\text{H}_{2(g)})$$

↑
loi de Hess

0 0

$$= 2 \times (-46)$$

$$\boxed{\Delta_r H^\circ = -92 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

$\Delta_r H^\circ < 0 \Rightarrow$ la réaction de synthèse de l'ammoniac (sens direct) est exothermique.

$$4) \quad \Delta_r S^\circ = 2S_m^\circ(\text{NH}_{3(g)}) - S_m^\circ(\text{N}_{2(g)}) - 3S_m^\circ(\text{H}_{2(g)})$$

$$= 2 \times 192 - 190 - 3 \times 130$$

$$\boxed{\Delta_r S^\circ = -136 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$

$$\Delta_r S^\circ < 0 : \text{OK car } \sum_i \nu_i = 2 - 1 - 3 = -2 < 0$$

il y a plus de gaz à gauche qu'à droite
désordre
entropie

$$\Rightarrow \Delta_r S^\circ < 0$$

$$5) \quad \Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ \quad (\Delta_r H^\circ \text{ et } \Delta_r S^\circ \text{ indépendants de } T \text{ dans l'approx. d'Ellingham})$$

$$= -RT \ln K^\circ$$

↑
loi d'action des masses

$$\Rightarrow \boxed{K^\circ = \exp \left(-\frac{\Delta_r H^\circ}{RT} + \frac{\Delta_r S^\circ}{R} \right)}$$

$$K^\circ = \exp \left(\frac{92 \cdot 10^3}{8,3 \times 300} + \frac{-136}{8,3} \right) = 6,0 \cdot 10^5$$

$$6) \quad Q_n = \frac{P_{\text{NH}_3}^2 P_{\text{O}_2}}{P_{\text{N}_2} P_{\text{H}_2}^3} = \frac{x_{\text{NH}_3}^2 P^2 P_{\text{O}_2}}{x_{\text{N}_2} P x_{\text{H}_2}^3 P^3}$$

$$Q_n = \frac{x_{\text{NH}_3}^2}{x_{\text{N}_2} x_{\text{H}_2}^3} \left(\frac{P^\circ}{P} \right)^2$$

On part d'un état d'équilibre: $Q_n = K^\circ$

On augmente P $\Rightarrow Q_n \propto \frac{1}{P^2} \searrow$

$$T = c^{\text{te}} \Rightarrow K^\circ = c^{\text{te}}$$

$$\Rightarrow Q_n < K^\circ \Rightarrow \Delta_r G = RT \ln \frac{Q_n}{K^\circ} < 0$$

$\Rightarrow$ évolution dans le sens 1.

Rq: loi de Le Châtelier OK: une augmentation de P à T et composition constantes d'un système à l'équilibre entraîne un déplacement ou une rupture d'équilibre dans le sens qui s'accompagne d'une diminution de la quantité de gaz, ici le sens 1 ($\sum_i \nu_i(g) = -2 < 0$).

variance = nombre de variables intensives
- nombre de relations entre ces variables

$$= 5 - 2 = 3$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \leftarrow & \\ P, T, x_{\text{NH}_3}, x_{\text{H}_2}, x_{\text{N}_2} & & K^\circ(T) = Q_n \text{ eq} \\ & & x_{\text{NH}_3} + x_{\text{H}_2} + x_{\text{N}_2} = 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ on peut fixer librement P et T (+ un autre paramètre intensif) sans rompre l'équilibre

$\Rightarrow P \uparrow \Rightarrow$ déplacement de l'équilibre dans le sens 1

7) relation de Van't Hoff: $\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$

ici $\Delta_r H^\circ < 0$, donc si $T \uparrow$, $dT > 0$,

$d \ln K^\circ < 0$, $K^\circ \downarrow$

$P = c^k \Rightarrow Q_n = c^k$

$\Rightarrow$ partant d'un état d'équilibre ($Q_n = K^\circ$),

si $T \uparrow \Rightarrow K^\circ < Q_n \Rightarrow \Delta_r G = RT \ln \frac{Q_n}{K^\circ} > 0$

$\Rightarrow$ évolution dans le sens indirect

cf variance $\Rightarrow$ déplacement

$\uparrow T$ déplacera l'équilibre dans le sens 2

Rq: loi de Van't Hoff OK: une augmentation de T à P et composition constantes d'un système à l'équilibre entraîne un déplacement ou une rupture d'équilibre dans le sens endothermique (ici le sens 2, cf question 3)).

8) * Un catalyseur est un constituant chimique qui permet d'accélérer la cinétique d'une réaction chimique.

Il est généralement introduit en faible quantité.

Il n'apparaît pas dans l'équation-bilan de la réaction, car bien que participant à la réaction d'une étape intermédiaire (ce qui explique son influence sur la vitesse de la réaction), il est régénéré à une étape suivante.

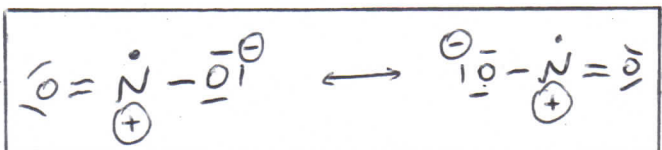
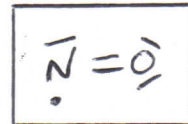
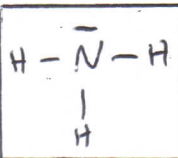
* D'après la question 7), pour favoriser la synthèse de l'ammoniac (sens 1), il faut, d'un point de vue thermodynamique, travailler à basse température.

La température est un facteur cinétique, mais si on veut que le rendement de la synthèse soit bon, il faut travailler à basse T .

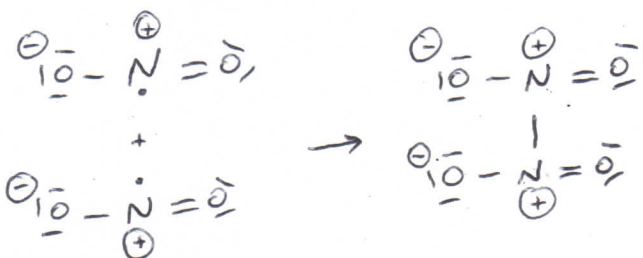
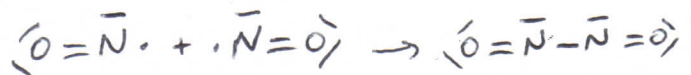
$\Rightarrow$ utiliser un catalyseur permet d'accélérer la synthèse de l'ammoniac.

(sachant qu'on ne peut pas trop augmenter T pour des raisons thermodynamiques).

3) $\cdot \bar{N} \cdot + H \cdot \bar{O} \cdot$



10) NO et NO_2 sont des radicaux, c'est-à-dire qu'ils possèdent chacun un électron célibataire. Ils sont donc très réactifs, et peuvent se dimériser (NO en N_2O_2 et NO_2 en N_2O_4)



Remarque à propos de la question 3):

Une autre formule mésomère pour NO_2 est:

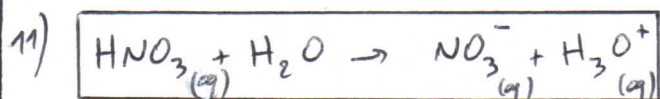


Mais cette formule a un poids statistique très faible car:

$\rightarrow \chi(O) > \chi(N) \Rightarrow O$ est + avide d' e^- et n'aura pas d' e^- célibataire

$\rightarrow$ pas de liaison $O-O$ lors de la dimérisation.

2) Diagramme potentiel-pH :



$$K_A = \frac{[\text{NO}_3^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HNO}_3] C_{\text{H}_2\text{O}}^0}$$

1 (solvant)

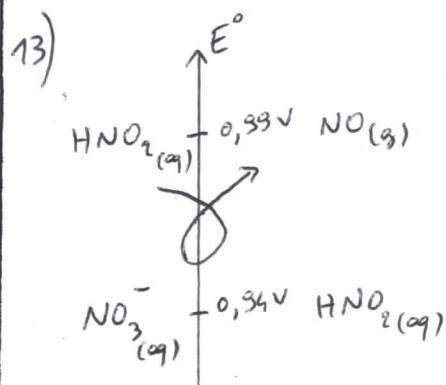
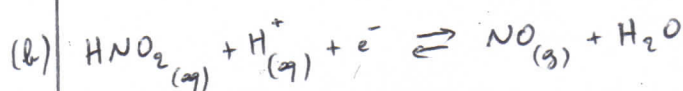
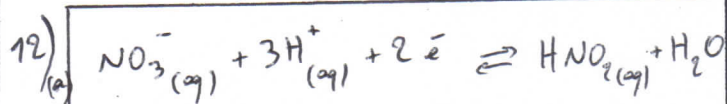
$$\Rightarrow -\log K_A = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] - \log \frac{[\text{NO}_3^-]}{[\text{HNO}_3]}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 pK_A pH

$$\Rightarrow pH = pK_A + \log \frac{[\text{NO}_3^-]}{[\text{HNO}_3]}$$

$\Rightarrow$ si $pH > pK_A$, $[\text{NO}_3^-] > [\text{HNO}_3]$,
la forme basique prédomine.
or $pK_A = -1,37 < 0$!

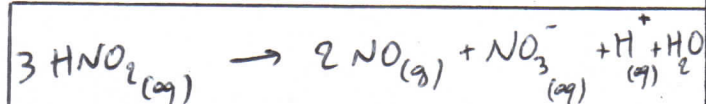
$\Rightarrow$ dans l'eau ($pH > 0$), HNO_3 est
totalement sous forme basique, il s'agit
d'un acide fort.



$\Rightarrow \text{HNO}_2(\text{aq})$ (oxydant de $\text{HNO}_2(\text{aq})/\text{NO}(\text{g})$)
réagit quantitativement avec $\text{HNO}_2(\text{aq})$
(réducteur du couple $\text{NO}_3^-(\text{aq})/\text{HNO}_2(\text{aq})$)

$\Rightarrow \text{HNO}_2$ n'est pas stable.

2(b)-(a) :



C'est une réaction de dismutation.



$no(N)$ dans NO_3^- : $+V$

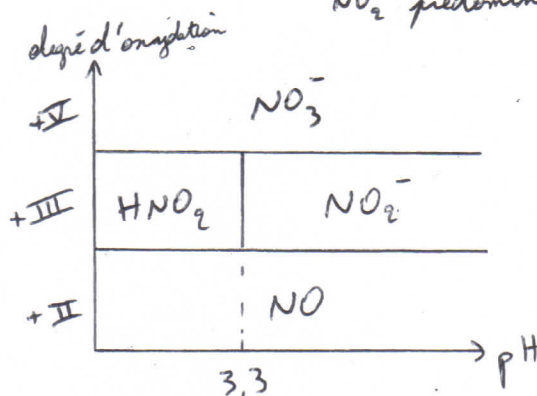
$\text{HNO}_2, \text{NO}_2^-$: $+III$

NO : $+II$

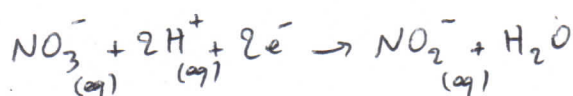
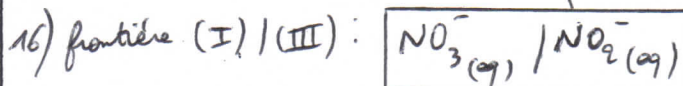
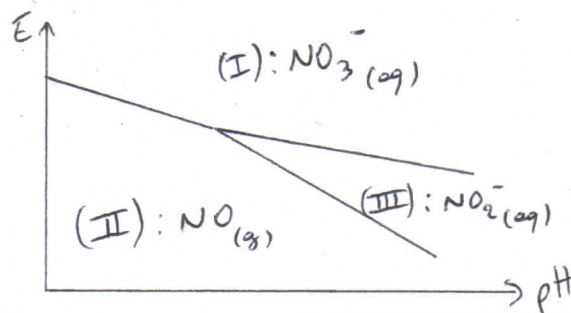


$$pH = pK_A + \log \frac{[\text{NO}_2^-]}{[\text{HNO}_2]}$$

$\Rightarrow$ si $pH > pK_A = 3,3$, $[\text{NO}_2^-] > [\text{HNO}_2]$,
 NO_2^- prédomine



15) Plus le degré d'oxydation est élevé, plus l'espèce
sera haute dans le diagramme E-pH.



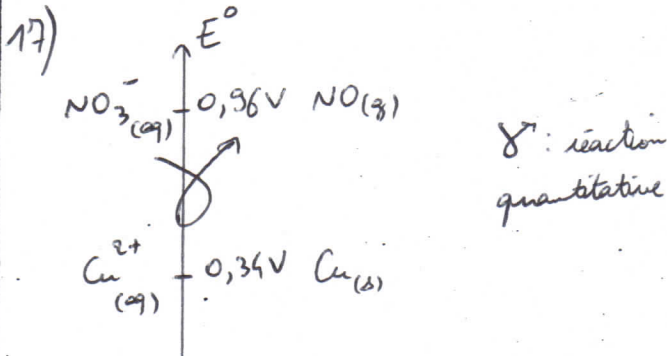
relation de Nernst:

$$E = E^{\circ}(\text{NO}_3^- / \text{NO}_2^-) + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{NO}_3^-][\text{H}^+]^2}{[\text{NO}_2^-]c_{\text{H}_2\text{O}}^2}$$

(solvant)

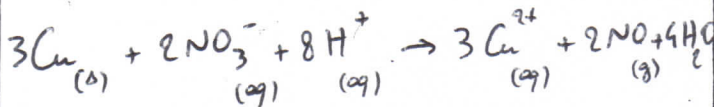
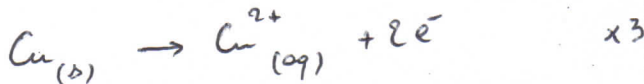
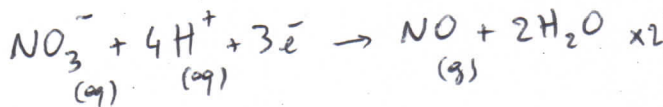
Sur cette frontière: $[\text{NO}_3^-] = [\text{NO}_2^-] = 1 \text{ mol.l}^{-1}$

$$\Rightarrow E = E^{\circ}(\text{NO}_3^- / \text{NO}_2^-) - 0,06 \text{ pH}$$



HNO_3 est un acide fort = $\text{H}^+ + \text{NO}_3^-$

En milieu acide, on ne peut s'intéresser qu'au couple $\text{NO}_3^- / \text{NO}$ (HNO_2 instable)



$$n_{\text{Cu init}} = \frac{m_{\text{Cu init}}}{M_{\text{Cu}}} = \frac{12,7}{63,5} = 0,200 \text{ mol} = n_{\text{Cu init}}$$

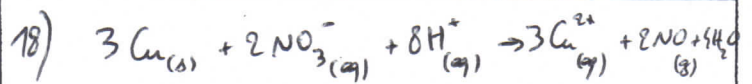
$$n_{\text{H}^+}^{\text{init}} = n_{\text{NO}_3^-}^{\text{init}} = n_{\text{HNO}_3} = c \cdot V = 2,00 \times 300 \cdot 10^{-3} = 0,600$$

$\text{HNO}_3 \rightarrow \text{H}^+ + \text{NO}_3^-$

$$n_{\text{H}^+}^{\text{init}} = n_{\text{NO}_3^-}^{\text{init}} = 0,600 \text{ mol}$$

$$\frac{8}{3} \times 0,200 = 0,533 < 0,600$$

→ le réactif limitant est $\text{Cu}_{(s)}$



EI	0,200	0,600	0,600	0	0	excès
t	$0,200 - 3x$	$0,600 - 2x$	$0,600 - 8x$	$3x$	$2x$	excès
EF	0	0,467	$6,67 \cdot 10^{-2}$	0,200	0,133	

$$n_{\text{Cu}_{(s)} \text{ final}} = 0 \Rightarrow 0,200 - 3x_f = 0 \Rightarrow x_f = 6,67 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

$$n_{\text{NO}_3^- \text{ final}} = 0,600 - 2x_f$$

$$n_{\text{H}^+ \text{ final}} = 0,600 - 8x_f$$

$$n_{\text{Cu}^{2+} \text{ final}} = 3x_f$$

$$n_{\text{NO} \text{ final}} = 2x_f$$

$$n_{\text{NO}_3^- \text{ final}} = 0,467 \text{ mol}$$

$$n_{\text{H}^+ \text{ final}} = 6,67 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

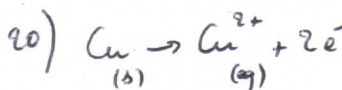
$$n_{\text{Cu}^{2+} \text{ final}} = 0,200 \text{ mol}$$

$$n_{\text{NO} \text{ final}} = 0,133 \text{ mol}$$

19) On forme $\text{NO}_{(g)}$

volume molaire V_m = volume d'une mole.

$$n_{\text{gaz formé}} = \frac{V_{\text{gaz formé}}}{V_m}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow n_{\text{e}^- \text{ transférés}} &= 2 n_{\text{Cu}_{(s)} \text{ consommé}} \quad (\text{Cu}_{(s)} \text{ en défaut}) \\ &= 2 \frac{m_{\text{Cu init}}}{M_{\text{Cu}}} \end{aligned}$$

charge transférée: Q

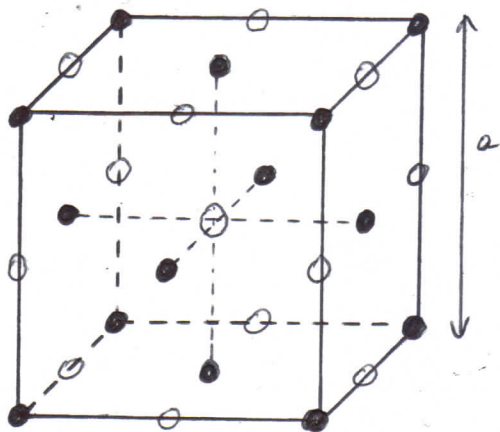
$$\begin{aligned} Q &= \text{nb de moles d'e}^- \text{ transférés} \times \text{charge d'une mole d'e}^- \\ &= n_{\text{e}^- \text{ transférés}} \times (-F) \end{aligned}$$

$$Q = \frac{-2 m_{\text{Cu init}} F}{M_{\text{Cu}}} = \frac{-2 \times 12,7 \times 9,65 \cdot 10^4}{63,5}$$

$$Q = -3,86 \cdot 10^4 \text{ C}$$

3) Le nitrure de titane :

21)



● : Ti : 1 atome à chaque sommet du cube
+ 1 atome au centre de chaque face.

○ : N : dans les sites octaédriques

↳ 1 au centre du cube

↳ au milieu de chaque arête

↳ 12 arêtes $\times \frac{1}{4}$ ← E à 4 mailles

$$\Rightarrow 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4 \text{ sites octaédriques par maille}$$

22) Ti : 1 atome à chaque sommet du cube

↳ 8 atomes $\times \frac{1}{8}$ ← E à 8 mailles

+ au centre de chaque face

↳ 6 faces $\times \frac{1}{2}$ ← E à 2 mailles

$$\Rightarrow 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ atomes de Ti par maille}$$

et 4 atomes de N par maille

(4 sites octaédriques)

⇒ 4 motifs TiN par maille

N se trouve dans un site octaédrique

⇒ N a 6 atomes de Ti comme voisin

$$\Rightarrow \text{coordination } N/Ti = [6]$$

$$\text{De même, } \text{coordination } Ti/N = [6]$$

(si on considère que c'est N qui détermine une cfc décalée de $\frac{a}{2}$, Ti occupe tous les sites octaédriques).

$$\text{coordination } Ti/Ti = \text{coordination } N/N = [12]$$

(structure cfc : 6 dans le même plan, 3 au-dessus, 3 en dessous)

$$23) \mu = \frac{\text{masse d'une maille}}{\text{volume d'une maille}}$$

$$= \frac{4 \times \text{masse d'1 atome de Ti} + 4 \times \text{masse d'1 atome de N}}{a^3}$$

$$= \frac{4 \times \frac{M_{Ti}}{N_A} + 4 \times \frac{M_N}{N_A}}{a^3}$$

$$\mu = \frac{4(M_{Ti} + M_N)}{N_A a^3} = \frac{4 \times (48,0 + 14,0) \cdot 10^{-3}}{6,0 \cdot 10^{23} \times (425 \cdot 10^{-12})^3}$$

$$\mu \approx \frac{248 \cdot 10^{-3}}{6 \times 75 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-30}} \approx \frac{250}{450} \cdot 10^4 \approx 5 \cdot 10^3$$

$$\mu \approx 5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

24) contact sur une arête du cube :

$$\Rightarrow a = r_{Ti} + 2r_N + r_{Ti}$$

$$\Rightarrow a = 2(r_{Ti} + r_N)$$

25) non contact sur la diagonale d'une face :

$$a\sqrt{2} > 4r_{Ti}$$

$$\Rightarrow r_{Ti} < \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

26) Ti qui $\Rightarrow$ contact sur la diagonale d'une face $\Rightarrow a\sqrt{2} = 4r_{Ti}$

rayon du site octaédrique: r_o

Sur une arête du cube: $a = 2(r_{Ti} + r_o)$

$$\Rightarrow \frac{4}{\sqrt{2}} r_{Ti} = 2\sqrt{2} r_{Ti} = 2r_{Ti} + 2r_o$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} - 1) r_{Ti} = r_o$$

$$27) r_o = (\sqrt{2} - 1) r_{Ti} = 0,414 \times 145 \text{ pm}$$

$$\Rightarrow r_o = 60,0 \text{ pm}$$

$$r_N = 65 \text{ pm} > r_o = 60,0 \text{ pm}$$

ce qui est conforme au fait qu'il n'y a pas contact entre 2 atomes de Ti.

$\Rightarrow$ la maille de Ti est déformée, agrandie, pour pouvoir loger les atomes d'azote.

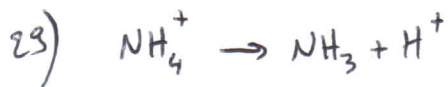
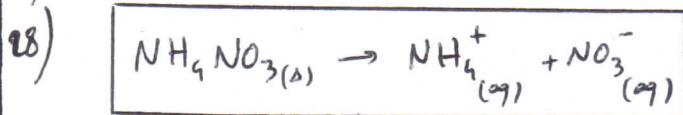
$$\text{Par ailleurs: } 2(r_{Ti} + r_N) = 2 \times (145 + 65) \\ = 420 \text{ pm}$$

$$\angle a = 425 \text{ pm}$$

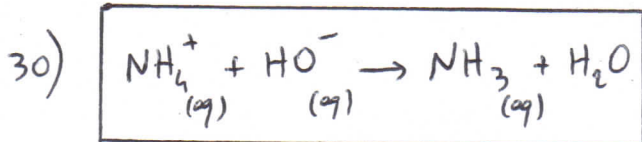
$\Rightarrow$ il faut remettre en cause le modèle des sphères dures.

Les liaisons ne sont pas entièrement métalliques, mais peuvent être en partie covalentes.

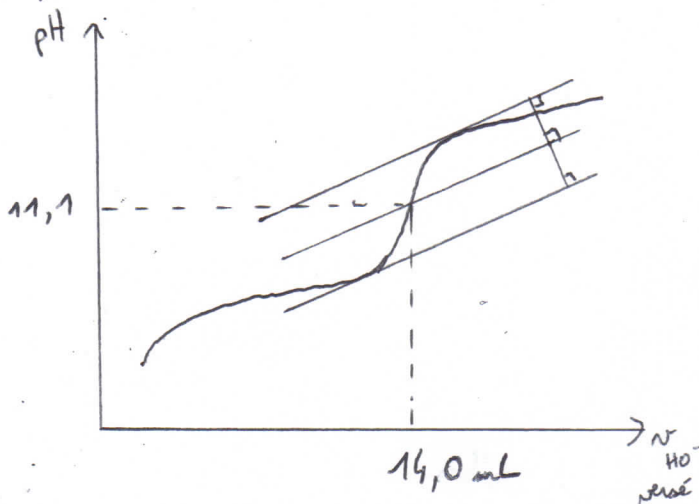
4) Tenue en élément azote d'un engrais:



NH_4^+ libère H^+ , c'est un acide de Brønsted.



31) On peut utiliser la méthode des tangentes parallèles.



on obtient $n_{\text{NaOH eq}} = V_E = 14,0 \text{ mL}$

et $\text{pH} = 11,1$

32) espèces présentes: Na^+ , NO_3^-
(spectateurs)

NH_4^+ et HO^- ont quasiment réagi totalement pour former NH_3 (et H_2O)

+ traces de H_3O^+ , HO^- , etc.

NH_3 est une base faible:



→ formation de HO^- → $\text{pH} > 7$ OK pour un dosage acide faible - base forte

33)
$$n_{\text{NH}_4^+ \text{ dosé}} = n_{\text{HO}^-} = c V_E$$

(dans bécher) $\uparrow$ équivalence (cf 30)

$$n_{\text{NH}_4^+ \text{ dans fiole}} = \frac{V_0}{V_1} n_{\text{NH}_4^+ \text{ dosé}} = \frac{V_0}{V_1} c V_E$$

$$n_{\text{NH}_4^+ \text{ dans fiole}} = c V_E \frac{V_0}{V_1} = 0,200 \times 14,0 \cdot 10^{-3} \frac{250}{10,0} = 7,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol OK}$$

cf 28):
$$n_{\text{NH}_4\text{NO}_3 \text{ présent}} = n_{\text{NH}_4^+ \text{ présent}} = 7,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol} = n_{\text{NH}_4\text{NO}_3 \text{ présent fiole}}$$

34)
$$m_N = M_N n_N = 2 M_N n_{\text{NH}_4\text{NO}_3 \text{ fiole}}$$

 $\uparrow$
2 atomes d'azote pour 1 NH_4NO_3

$$m_N = 2 \times 14,0 \times 7,00 \cdot 10^{-2} = 1,96 \text{ g}$$

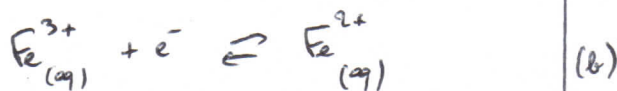
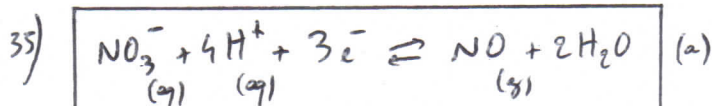
$$m_N = 1,96 \text{ g} \approx 2 \text{ g}$$

$$\% \text{ en masse de N} = \frac{1,96}{6,00} \approx 32,7\% \approx 34,4\%$$

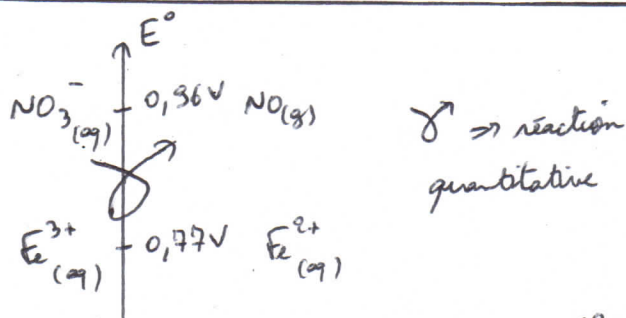
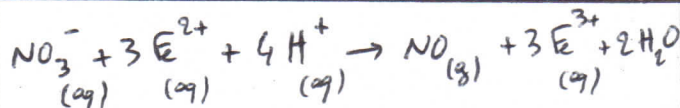
Sachant qu'il y a des erreurs au niveau des mesures, on peut dire que les indications du fabricant sont correctes.

5) Pollution par les nitrates : dosage indirect

des nitrates contenus dans une eau :



36) (a) - 3(b) :



Pour être plus complet, on peut calculer K° :

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r G_a^\circ - 3\Delta_r G_b^\circ$$

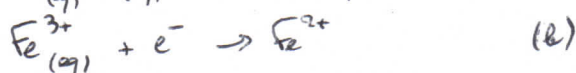
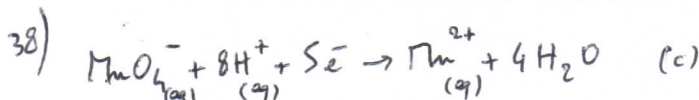
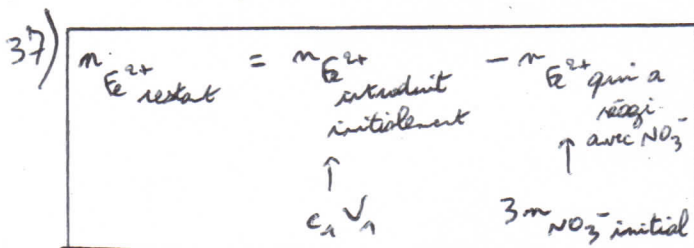
↓ loi d'action des masses

$$-RT \ln K^\circ = -3 \int E_a^\circ - 3(-1 \int E_b^\circ)$$

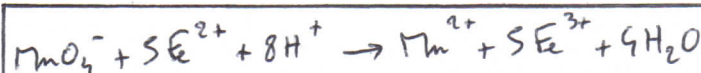
$$\Rightarrow \frac{RT}{\int} \ln K^\circ = 0,06 \log K^\circ = 3(E_a^\circ - E_b^\circ)$$

$$\Rightarrow K^\circ = 10^{\frac{0,96-0,77}{0,02}} = 10^{9,5} \gg 1$$

⇒ réaction quasi-totale.



(c) - 5(b) :



39) Cette réaction est quasiment totale (cf écart de E° , idem 36))

$$n_{\text{Fe}^{2+} \text{ dosé}} = 5 n_{\text{MnO}_4^- \text{ à l'équivalence}} = 5 c_2 V$$

$$= c_1 V_1 - 3 n_{\text{NO}_3^-}$$

$$\Rightarrow n_{\text{NO}_3^- \text{ de l'échantillon}} = \frac{c_1 V_1 - 5 c_2 V}{3}$$

$$= \frac{1,00 \cdot 10^{-3} \times 100 \cdot 10^{-3} - 5 \times 3,00 \cdot 10^{-4} \times 11,0 \cdot 10^{-3}}{3} = 2,78 \cdot 10^{-5} \text{ mol OK}$$

$$40) \quad C_{\text{NO}_3^- \text{ molaire}} = \frac{n_{\text{NO}_3^-}}{V_0} = \frac{2,78 \cdot 10^{-5}}{50,0 \cdot 10^{-3}} = 5,56 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C_{\text{NO}_3^- \text{ massique}} = C_{\text{NO}_3^- \text{ molaire}} \times M_{\text{NO}_3^-} = 5,56 \cdot 10^{-4} \times 62,0 = 3,45 \cdot 10^{-2} \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} = 34,5 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$$

$< 50 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow$ l'eau est potable.

$$41) \text{ masse mani de NO}_3^- = 3,65 \text{ mg/kg} \times 35 \text{ kg} = 1,3 \cdot 10^2 \text{ mg}$$

$$V_{\text{mani}} = \frac{\text{masse mani de NO}_3^-}{C_{\text{NO}_3^- \text{ massique}}} = \frac{1,3 \cdot 10^2}{34,5}$$

$$V_{\text{mani}} = 3,7 \text{ L pas si grand que ça!}$$

La marge n'est pas énorme!

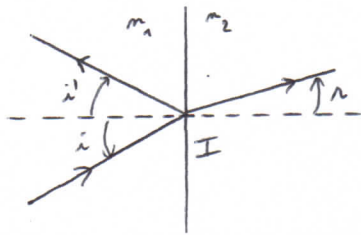
Pour une eau (légitime) à $50 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, on trouve $V_{\text{mani}} = 2,5 \text{ L}$. Un enfant de 35 kg ne boit sans doute pas 2,5 L d'eau par jour, mais la marge de sécurité n'est pas très élevée.

DEUXIEME PROBLEME: Spectroscopie à prisme

(d'après Banque PT 2005)

1) Lois de Descartes pour la réflexion et la réfraction:

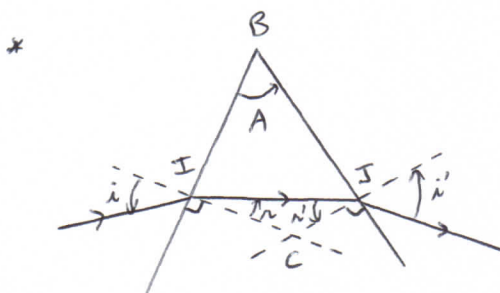
* Tous les rayons (incident, réfléchi et réfracté) sont contenus dans un même plan, c'est-à-dire le plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale au dioptre en I.



* $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ réfraction (on suppose ici qu'il y a toujours un rayon émergent, il n'y a donc pas de réflexion totale)
 $i' = -i$ réflexion

⇒ en I : $\sin i = n \sin r$

en J : $n \sin r' = \sin i'$



Dans le quadrilatère BICJ :

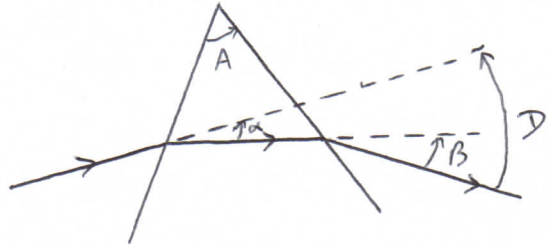
$$2\pi = A + \frac{\pi}{2} + \widehat{JCI} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{JCI} = \pi - A$$

Dans le triangle IJC :

$$\pi = r + r' + \widehat{JCI}$$

$$\Rightarrow r + r' + \pi - A = \pi \Rightarrow \boxed{r + r' = A}$$

2)



$$D = \alpha + \beta$$

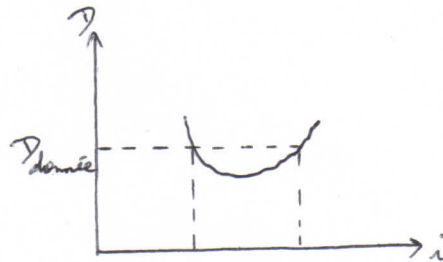
$$\text{or } \alpha = i - r \text{ et } \beta = i' - r'$$

$$\Rightarrow D = i - r + i' - r' = i + i' - \underbrace{(r + r')}_A$$

$$\Rightarrow \boxed{D = i + i' - A}$$

Un angle d'incidence i donne un angle d'émergence i' , et donc, par le principe de retour inverse de la lumière, un angle d'incidence i' donnera un angle d'émergence i . Etant donné que $D = i + i' - A$, les couples (i, i') et (i', i) donneront la même déviation D .

⇒ la déviation est la même pour 2 angles, d'où l'allure de la courbe :



⇒ 2 solutions pour i : i et i'

⇒ $i = i'$ au minimum de la courbe.

3) Au minimum de déviation, $i = i'$.

⇒ $r = r'$ d'après les lois de Descartes (ou d'après la symétrie par rapport à la bissectrice de l'angle $\hat{A}$).

$$r=r' \text{ or } r+r'=A \Rightarrow r_0=r=r'=\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \sin i_0 = n \sin \frac{A}{2} \quad (\text{loi de Descartes})$$

$$\Rightarrow i_0 = \text{Arcsin} \left(n \sin \frac{A}{2} \right)$$

$$D = i + i' - A \Rightarrow D_m = 2i_0 - A$$

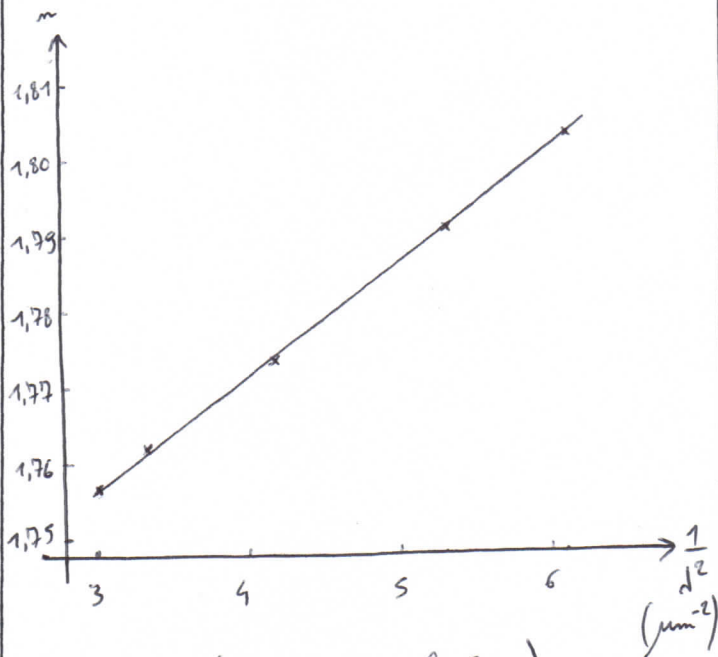
$$\Rightarrow i_0 = \frac{A + D_m}{2} = \text{Arcsin} \left(n \sin \frac{A}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{A + D_m}{2} \right) = n \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\sin \left(\frac{A + D_m}{2} \right)}{\sin \left(\frac{A}{2} \right)}$$

4) f est la fonction sinus

5) On trace la courbe $n = f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$. On obtient une droite de pente b et d'ordonnée à l'origine a .



On obtient: (par régression linéaire)

$$n = 1,712 + \frac{0,01491}{\lambda^2} \quad \text{avec } \lambda \text{ en } \mu\text{m}$$

Le prisme est dispersif car l'indice n dépend de la longueur d'onde λ , donc la célérité de l'onde lumineuse ($= \frac{c}{n}$) dépend de λ .

$$6) n = 1,777 = 1,712 + \frac{0,01491}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = 0,4783 \mu\text{m}$$

$$\Rightarrow \lambda = 478,3 \text{ nm}$$

$\Rightarrow$ couleur bleue (tirant vers le vert)

PARTIE A: Règle de "SCHEIMPFLUG"I) Image réelle d'un objet réel rectiligne dans un plan frontal

1) relation de conjugaison: $-\frac{1}{OC} + \frac{1}{OC'} = \frac{1}{OF'}$

$$\Rightarrow \frac{1}{dc} + \frac{1}{di} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{di} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{dc}$$

$$\Rightarrow \boxed{di = \frac{f' dc}{dc - f'}}$$

2) grandissement $\gamma = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$
def. relation de conjugaison

$$\Rightarrow \overline{C'B'} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} \overline{CB} = \frac{di}{-dc} \overline{CB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{C'B'} = H \frac{di}{dc}} > 0 \text{ (l'image est renversée par rapport à } \overline{CB} < 0 \text{)}$$

3) $di = \frac{f' dc}{dc - f'} = 4 \text{ cm} = di$

4) $di = \frac{f' dc}{dc - f'} \Rightarrow x' = \frac{f'(-x)}{(-x) - f'} \quad (dc > 0, x < 0)$

$$\Rightarrow \boxed{x' = \frac{f' x}{f' + x}}$$

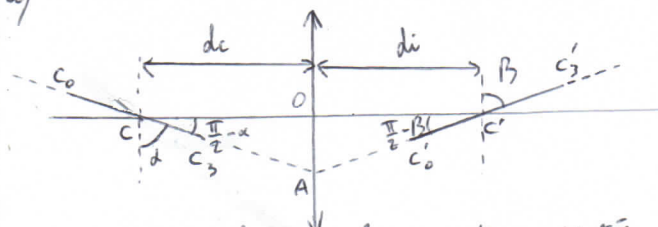
$$\gamma = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} x' = \frac{f' y}{f' + x} = y'$$

def. relation de conjugaison

II) Image d'un objet rectiligne incliné: règle de Scheimpflug:

1) la règle de Scheimpflug:

a)



Dans cette question, les angles ne sont pas orientés.

Le rayon passant par $C_0 C_2$ doit sortir en passant par $C'_0 C'_2$ $\begin{pmatrix} C_0 \rightarrow C'_0 \\ C_2 \rightarrow C'_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{OA}{dc} \Rightarrow OA = \frac{dc}{\tan \alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{OA}{di} \Rightarrow OA = \frac{di}{\tan \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{\tan \alpha} = \frac{di}{\tan \beta} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

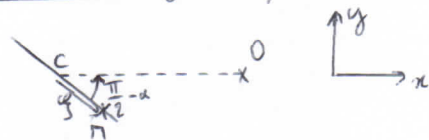
en prenant dans angles α et β algébriques ($\alpha > 0, \beta < 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dc}{\tan \alpha} = -\frac{di}{\tan \beta}}$$

b) $di = 4 \text{ cm}$
 $dc = 10 \text{ cm}$
 $\alpha = -57^\circ$
 $\Rightarrow \boxed{\beta = 33^\circ}$

2) Position de l'image d'un point:

a)



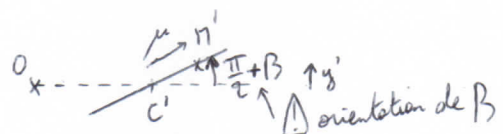
$$\vec{ON} = \vec{OC} + \vec{CN} = \begin{pmatrix} -dc \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -dc + y \sin \alpha \\ -y \cos \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

$$\text{cf I-4)} \quad y' = \frac{f' y}{f' + x} = \frac{-f' y \cos \alpha}{f' - dc + y \sin \alpha}$$

point	Π	Π'
abscisse	$x = -dc + y \sin \alpha$	
ordonnée	$y = -y \cos \alpha$	$y' = \frac{-f' y \cos \alpha}{f' - dc + y \sin \alpha}$

b)



$$y' = \mu \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \mu \cos \beta$$

$$\boxed{y' = \mu \cos \beta}$$

$$c) \mu = \frac{y'}{\cos \beta} = \frac{-f' \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} g}{f' - dc + g \sin \alpha}$$

$$\mu = \frac{f' \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} g}{dc - f' - g \sin \alpha} = \frac{\frac{f'}{dc - f'} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} g}{1 - \frac{\sin \alpha}{dc - f'} g}$$

$$\mu = \frac{K g}{1 - D g} \quad \text{avec } D = \frac{\sin \alpha}{dc - f'}$$

$$\text{et } K = \frac{f'}{dc - f'} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

3) Déformation de l'image d'un objet :

on relève $\mu_3 = 5,4 \text{ cm}$ et $\mu_0 = -4,3 \text{ cm}$
 (sur l'énoncé original)

$$\mu_3 = \frac{K g_3}{1 - D g_3} \quad \mu_0 = \frac{K g_0}{1 - D g_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_3}{\mu_0} = \frac{K g_3}{1 - D g_3} \frac{1 - D g_0}{K g_0}$$

$$\Rightarrow \mu_3 g_0 (1 - D g_3) = \mu_0 g_3 (1 - D g_0)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 g_0 - \mu_0 g_3 &= \mu_3 g_0 g_3 D - \mu_0 g_3 g_0 D \\ &= g_0 g_3 (\mu_3 - \mu_0) D \end{aligned}$$

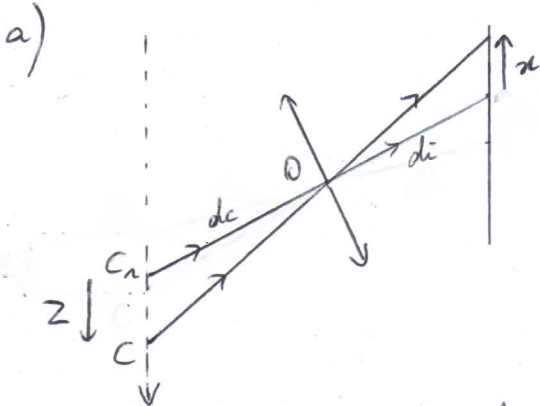
$$\Rightarrow D = \frac{\mu_3 g_0 - \mu_0 g_3}{g_0 g_3 (\mu_3 - \mu_0)} = 7,6 \text{ m}^{-1} = D$$

$$\alpha \quad D = \frac{\sin \alpha}{dc - f'} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 27^\circ$$

Rq: Après passage dans un scanner, puis une photocopie, il est possible que les longueurs μ_3 et μ_0 mesurées sur cet énoncé ne soient pas les mêmes que sur le sujet original.

PARTIE B : Capteur de position par triangulation

1) Géométrie simple :



D'après le théorème de Thalès : $\frac{di}{dc} = \frac{x}{Z}$

$$\Rightarrow \boxed{Z = \frac{dc}{di} x}$$

b) $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \Rightarrow -\frac{dc}{di} \frac{L}{2} < Z < \frac{dc}{di} \frac{L}{2}$

$\quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"}$
 $\quad \quad \quad Z_i \quad \quad \quad Z_s$

$$Z_i = -\frac{dc}{di} \frac{L}{2} = -23 \text{ mm}$$

$$Z_s = \frac{dc}{di} \frac{L}{2} = 23 \text{ mm}$$

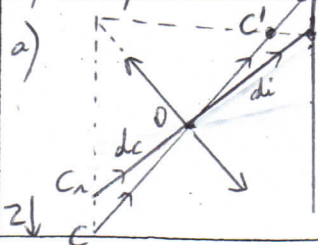
c) $Z = \frac{dc}{di} x = \frac{dc}{di} \frac{U_s}{A}$

En supposant qu'il n'y a pas d'incertitude sur dc , di , et A :

$$\Rightarrow \boxed{\delta Z = \frac{dc}{A di} \delta U_s = 2 \mu\text{m}}$$

δZ est indépendant de Z , donc de la position de la cille.

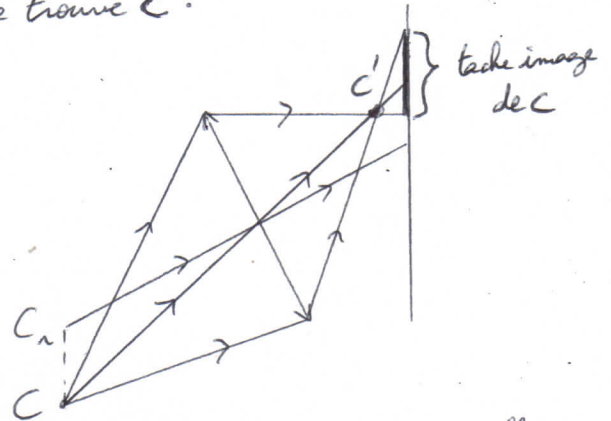
2) Critique de la géométrie simple :



* Le rayon passant par C et O n'est pas dévié.
* Le rayon passant par C et C_n ressort en passant par le centre du PSD ($x=0$)
 $\Rightarrow$ d'où le point C' .

b) On constate que C' (image de C par la lentille) n'est pas sur le détecteur PSD.

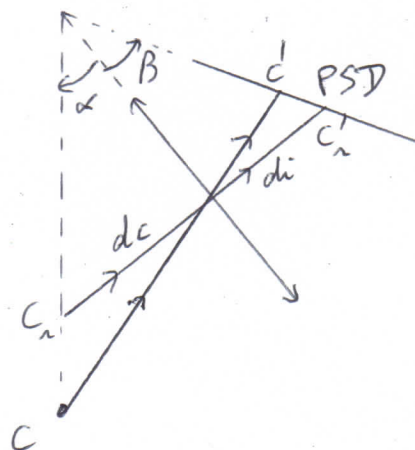
On régénère donc une "tache" lumineuse sur le détecteur, et on ne saura donc pas exactement où se trouve C.



$\Rightarrow$ les résultats du B-1-c) sont illusoires.

δZ dépend de la position de la cille (+ Z est grand, + δZ sera grand).

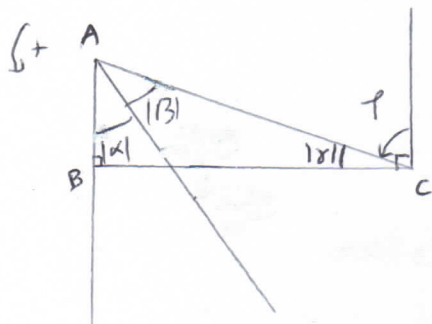
3) Optimisation de la géométrie :



$$\frac{dc}{\tan \alpha} = -\frac{di}{\tan \beta} \quad (\text{règle de Scheimpflug})$$

$$\Rightarrow \tan \beta = -\frac{di}{dc} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \beta = 34^\circ$$



Dans le triangle rectangle ABC :

$$(|\alpha| + |\beta|) + |\gamma| + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow |\gamma| = \frac{\pi}{2} - |\alpha| - |\beta|$$

$$\text{or } \gamma = \frac{\pi}{2} - |\gamma| = |\alpha| + |\beta| = \beta - \alpha$$

($\beta > 0, \alpha < 0$)

$$\boxed{\gamma = \beta - \alpha = 91^\circ}$$

e) * On peut vérifier que les valeurs numériques de B et C correspondent bien à $B = K$ et $C = -D$ dans la partie

$$* x = \frac{BZ}{1+CZ} \Rightarrow x + xCZ = BZ \quad A) II) c)$$

$$\Rightarrow x = Z(B - Cx) \Rightarrow Z = \frac{x}{B - Cx}$$

Étude de la fonction $Z(x) = \frac{x}{B - Cx}$

$$Z'(x) = \frac{(B - Cx) - x(-C)}{(B - Cx)^2} = \frac{B}{(B - Cx)^2} > 0$$

Z ↑ avec x

$$\Rightarrow Z_i = Z\left(x = -\frac{L}{2}\right) = \frac{-\frac{L}{2}}{B + C\frac{L}{2}}$$

$$Z_s = Z\left(x = +\frac{L}{2}\right) = \frac{\frac{L}{2}}{B - C\frac{L}{2}}$$

$$\boxed{Z_i = \frac{-\frac{L}{2}}{B + C\frac{L}{2}} = -25 \text{ mm}}$$

$$\boxed{Z_s = \frac{\frac{L}{2}}{B - C\frac{L}{2}} = 63 \text{ mm}}$$

$$c) Z = \frac{x}{B - Cx} \quad \text{et } x = \frac{U_s}{A} \Rightarrow Z = \frac{U_s}{AB - CU_s}$$

$$\ln Z = \ln U_s - \ln(AB - CU_s)$$

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dU_s}{U_s} - \frac{d(AB - CU_s)}{AB - CU_s} = \frac{dU_s}{U_s} + C \frac{dU_s}{AB - CU_s}$$

$$\Rightarrow dZ = Z \left(\frac{1}{U_s} + \frac{C}{AB - CU_s} \right) dU_s$$

$$\text{or } \frac{1}{AB - CU_s} = \frac{Z}{U_s} \Rightarrow dZ = \frac{Z}{U_s} (1 + CZ) dU_s$$

$$\text{or } \frac{Z}{U_s} = \frac{1 + CZ}{AB} \quad \text{car } x = \frac{U_s}{A} = \frac{BZ}{1 + CZ}$$

$$\Rightarrow dZ = \frac{(1 + CZ)^2}{AB} dU_s$$

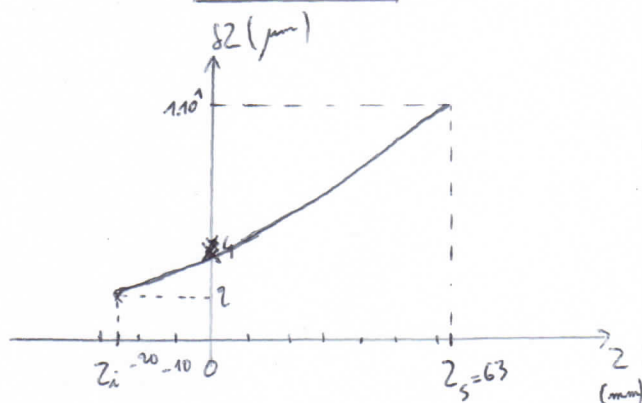
$$\boxed{\delta Z = \frac{(1 + CZ)^2}{AB} \delta U_s}$$

$$d) a) * Z = 0 : \delta Z = 4 \mu\text{m}$$

$$* Z = Z_i : \delta Z = 2 \mu\text{m}$$

$$* Z = Z_s : \delta Z = 1.10^1 \mu\text{m}$$

d) b)



4) Discussion :

Si la cible réfléchissait la lumière, alors le point cible ne se comporterait pas comme un objet lumineux ponctuel. La lumière se répartirait que dans une direction (loi de Descartes).