Les questions à choix multiples sont signalées par la mention **QCM**. *Pour chaque* **QCM**, *plusieurs réponses sont proposées et il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses. Vous entourerez la (ou les) réponse(s) choisie(s) sur la feuille de réponses. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse fausse ne sera pas pénalisée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.

Mathématiques - EXERCICE I (31 points)

Partie A – Etude d'un triangle ABC

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le triangle dont les sommets A, B et C sont définis par leurs coordonnées respectives :

$$A\,(6\,;0) \qquad B\,(4\,;8) \qquad C\,(-4\,;0)$$

I-1- Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

I-2- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. Détailler le calcul.

I-3- Calculer la valeur exacte de la norme des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. Détailler le calcul. Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers avec b le plus petit possible.

I-4- En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{ABC})$. Justifier la réponse.

I-5- Calculer la valeur exacte de $\sin(\widehat{ABC})$. Justifier la réponse.

I-6- Montrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est 40 unités d'aire.

Partie B – Etude d'un tétraèdre $ABCD$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le tétraèdre dont les sommets A, B, C et D sont définis par leurs coordonnées respectives :

$$A\,(6\,;0\,;0) \qquad B\,(4\,;8\,;0) \qquad C\,(-4\,;0\,;0) \qquad D\,(-4\,;0\,;20)$$

Le triangle ABC est celui étudié dans la **Partie *A***, placé dans le plan d'équation $z = 0$.
La droite (DC) est parallèle à l'axe (Oz).

I-7- Que représente la droite (DC) pour le tétraèdre $ABCD$?

I-8- On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h$, où A_{base} représente l'aire de la base de la pyramide et où h en représente la hauteur.
Calculer la valeur exacte, en unités de volume, du volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $ABCD$. Détailler le calcul.

I-9- On donne le vecteur $\vec{n}\,(4\,;1\,;2)$. Calculer $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA}$. Détailler le calcul.

I-10- Justifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD).

I-11- En déduire une équation cartésienne du plan (ABD). Détailler le calcul.

I-12- On note A' le point d'intersection du plan (ABD) avec l'axe (Oz). Donner les coordonnées de A'.

I-13- Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{DA'} = k\,\overrightarrow{DA}$. Justifier la réponse.

I-14- **QCM** - Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par A' et parallèle au plan (ABC). Soit $(A'B'C')$ la section de $(\mathcal{P})$ avec le tétraèdre $ABCD$. Quelle est la valeur approchée en unités de volume, arrondie à l'unité, du volume du tétraèdre $A'B'C'D$?

A) 17 unités de volume
B) 107 unités de volume
C) 160 unités de volume
D) 250 unités de volume

Partie C – Dans une sphère

On appelle plan médiateur d'un segment non réduit à un point, l'ensemble des points de l'espace équidistants des extrémités de ce segment. C'est le plan perpendiculaire au segment en son milieu.

I-15- Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AC]$.

I-16- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

I-17- En déduire qu'une équation du plan médiateur P_1 du segment $[AC]$ est $x = 1$. Justifier la réponse.

I-18- Justifier qu'une équation du plan médiateur P_2 du segment $[AB]$ est $x - 4y + 11 = 0$.

On admet qu'une équation du plan médiateur P_3 du segment $[CD]$ est $z = 10$.

I-19- En utilisant les équations des plans médiateurs, déterminer les coordonnées du centre Ω de la sphère $(\mathcal{S})$ circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Détailler le calcul.

I-20- Calculer le rayon R de la sphère $(\mathcal{S})$. Détailler le calcul.

Mathématiques - EXERCICE II (22 points)

Tous les résultats de cet exercice seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.
*Les **Parties A** et **B** sont indépendantes.*

Soit A et B deux pièces de monnaie. La pièce A donne « Face » avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la pièce B donne « Face » avec la probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsqu'on lance l'une de ces deux pièces, si on obtient « Face », on conserve cette pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Partie A – Trois lancers successifs des pièces

On effectue une série de trois lancers, en commençant par lancer la pièce A. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 3, on note F_i l'événement « on obtient Face au $i^{\text{ème}}$ lancer » et $P_i = \overline{F_i}$ l'événement contraire.

II-1- Compléter l'arbre de probabilités donné.

II-2- X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de fois où « Face » est obtenu.
Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X.

II-3- Calculer l'espérance de X.

Partie B – Etude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{pour tout } n \geq 0\,,\ u_{n+1} = -\frac{1}{4}\,u_n + \frac{3}{4} \end{cases}$$

II-4- Donner les valeurs de u_1 et u_2.

II-5- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout } n \geq 0\,, v_n = u_n - \frac{3}{5}.$$

II-5-a- Donner la valeur de v_0.

II-5-b- Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

II-6- Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = -\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$.

II-7- Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\frac{3}{5}$.

Partie C – n lancers successifs des pièces

Dans cette partie, on ne se limite plus à trois lancers.
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère les événements suivants :
A_n : "on utilise la pièce A pour le $n^{ème}$ lancer »
$\overline{A_n}$: « on utilise la pièce B pour le $n^{ème}$ lancer ».
On note $p_n = P(A_n)$. On commence toujours par lancer la pièce A et on a donc $p_1 = 1$.

II-8- Donner $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.

II-9- Donner l'expression de $P(\overline{A_n})$, $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de p_n.

II-10- En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$.

D'après ce qui précède et la question **II-6-**, on a $p_n = -\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{5}$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

II-11- On note F_n l'événement « obtenir Face au $n^{ème}$ lancer ».

II-11-a- Donner l'expression de $P(F_n \cap A_n)$ et $P(F_n \cap \overline{A_n})$ en fonction de p_n.

II-11-b- Déterminer la limite de la probabilité $P(F_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Justifier la réponse.

Mathématiques - EXERCICE III (27 points)

*Les **Parties A** et **B** sont indépendantes. La **Partie C** dépend des deux premières parties.*
On souhaite étudier l'évolution au cours du temps de la concentration d'un analgésique dans le sang : par voie intraveineuse dans la **Partie A,** puis par voie orale dans la **Partie B**.

Partie A – Voie intraveineuse

Dans cette partie, λ est une constante réelle strictement positive.
On considère l'équation différentielle $(E_1) : y'(t) = -\lambda y(t)$, où y est une fonction définie pour tout réel t.

III-1- Déterminer la solution générale de (E_1).

III-2- On appelle Q la solution de (E_1) qui vérifie $Q(0) = 0{,}6$. Donner l'expression de Q en fonction de λ. Justifier la réponse.

III-3- Donner la limite de Q en $+\infty$. Donner le sens de variation de Q. Aucune justification n'est demandée.

A l'instant $t = 0$, une dose d'un analgésique est injectée dans le sang par voie intraveineuse. La substance se répartit instantanément dans le sang, ce qui donne une concentration initiale de 0,6 mg/L, et est ensuite progressivement éliminée.
Pour tout $t \geq 0$, la concentration de médicament, en mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est égale à $Q(t)$ trouvée à la question **III-2-**.
Au bout d'une heure, la concentration de médicament présente dans le sang a diminué de 30%.

III-4- Calculer la valeur de λ. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près. Justifier la réponse.

Le médicament est efficace tant que sa concentration dans le sang est supérieure à 0,1 mg/L.

III-5- Déterminer, en heures, le temps d'efficacité t_e du médicament. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près. Justifier la réponse.

Partie B – Voie orale

On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'(t) + y(t) = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{t}{2}}$.

III-6- Vérifier que la fonction g définie, pour tout réel t, par $g(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ est une solution de (E_2).

III-7- En déduire la solution générale de (E_2).

III-8- Donner la solution f de (E_2) vérifiant $f(0) = 0$. Justifier la réponse.

On considère la fonction q définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $q(t) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}$. On note $\mathcal{C}_q$ la courbe représentative de q dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

III-9- Donner la limite de q en $+\infty$. En déduire une équation de l'asymptote Δ à $\mathcal{C}_q$ en $+\infty$.

III-10- q' désigne la fonction dérivée de q. Pour tout réel positif t, $q'(t)$ s'écrit sous la forme

$$q'(t) = e^{-\frac{t}{2}}(a\,e^{-\frac{t}{2}} + b).$$

Donner la valeur de a et de b. Justifier la réponse.

III-11- Donner l'ensemble des solutions réelles t de l'inéquation $q'(t) > 0$. Justifier la réponse.

III-12- Soit A le point de $\mathcal{C}_q$ d'abscisse $x_A = \ln 4$ et d'ordonnée y_A. Calculer la valeur exacte de y_A. Détailler le calcul.

III-13- Compléter le tableau de variations de q sur $[0\,;\,+\infty[$.

A l'instant $t = 0$, un analgésique est administré par voie orale en une prise. La substance est absorbée progressivement dans le sang puis éliminée.
Pour tout $t \geq 0$, la concentration de médicament, en mg/L, présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est égale à $q(t)$.
Le médicament cause des effets indésirables quand sa concentration dans le sang est supérieure à 0,3 mg/L.

III-14- Le médicament va-t-il causer des effets indésirables au patient ? Justifier la réponse.

Partie C – Comparaison des deux méthodes

III-15- **QCM** - Quel mode d'administration choisirons-nous si nous voulons être tout de suite soulagé de la douleur ?

A) Voie orale B) Voie intraveineuse C) Peu importe lequel

III-16- **QCM** - Sachant que l'analgésique est efficace quand sa concentration dans le sang est supérieure à 0,1 mg/L par les deux méthodes, quel mode d'administration choisirons-nous si nous voulons que ce médicament soit efficace le plus longtemps possible ?

A) Voie orale B) Voie intraveineuse C) Peu importe lequel