EXERCICE 1 :

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire trois fois de suite une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres

1. dans un ordre strictement croissant ?
2. dans un ordre croissant au sens large ?

EXERCICE 2 :

On considère N coffres. Un trésor a été placé dans l'un de ses coffres avec une probabilité p. Chaque coffre peut être choisi de façon équiprobable.
On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité qu'il figure dans le dernier coffre ?

EXERCICE 3 :

Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
2. Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule soit noire ?
3. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

EXERCICE 4 :

Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   (a) A : « Le tirage est tricolore » ;
   (b) B : « Le tirage contient la boule noire et au moins une rouge » ;
   (c) C : « Les trois boules tirées sont de la même couleur ».
2. On suppose maintenant que les tirages s'effectuent successivement, avec remise. Déterminer les probabilités des trois événements ci-dessus.

EXERCICE 5 :

On tire successivement 12 cartes, sans remise, d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité des événements suivants ?

1. On tire les 4 as ;
2. On tire les 4 as consécutivement ;
3. On obtient 7 piques et 2 dames.

EXERCICE 6 :

Une souris donne naissance à 1,2 ou 3 souriceaux avec équiprobabilité. Chaque souriceau a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être une femmelle.

1. Quelle est la probabilité que tous les souriceaux soient des femelles ?
2. Sachant que tous les souriceaux sont des femelles, quelle est la probabilité que la souris n'ait donné naissance qu'à un seul souriceau ?

EXERCICE 7 :

Soit $n \geqslant 5$. Les n personnes d'une assemblée élisent leur président. Il y a trois candidats a, b et c. Un candidat est élu s'il obtient au moins $n-2$ voix. Quelle est la probabilité pour qu'aucun candidat ne soit élu ?
(*on s'intéressera à la probabilité d'élection d'un président, par exemple* a)

EXERCICE 8 :

On considère n personnes $I_1, I_2, \ldots, I_n$. I_1 reçoit une information sous la forme de « oui » ou « non » et la transmet à I_2, puis de I_2 la transmet à I_3, et etc. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, le contraire avec la probabilité $1-p$, et les réponses des personnes sont indépendantes.

1. Calculer la probabilité p_k pour que l'information transmise par I_k soit celle reçue par I_1. (établir une relation de récurrenc entre p_k et p_{k+1})
2. Que se passe-t-il lorsque k tend vers $+\infty$?

EXERCICE 9 :

1. Une urne contient 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi 2 boules noires ? une seule boule noire ? aucune boule noire ?
2. Une urne contient 1 boule noire et 4 boules blanches. On tire simultanément 2 boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi 1 boule noire ? aucune boule noire ?
3. On dispose d'une urne U_0 contenant 2 boules noires et 3 boules blanches, et d'urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ contenant chacune 3 boules blanches.
   On tire simultanément 2 boules de l'urne U_0, on les place dans l'urne U_1, et on appelle X_1 le nombre de boules noires contenues dans l'urne U_1.
   De l'urne U_1 contenant alors 5 boules, on tire simultanément 2 boules et l'on les place dans l'urne U_2 et ainsi de suite.
   On définit ainsi pour n entier naturel, X_n le nombre de boules noires contenues dans U_n lorsque les boules provenant de l'urne précédente y ont été déposées et juste avant de tirer 2 boules de l'urne U_n.
   (a) Calculer $P(X_1 = i)$ pour $i = 0, 1$ ou 2.
   (b) Pour $n \neq 0$, exprimer $p(X_n = 2)$ à l'aide de X_{n-1}. En déduire que $p(X_n = 2) = (0,1)^n$.
   (c) $n \neq 0$. Montrer que
   $$p(X_{n+1} = 1) = 0,6p(X_n = 2) + 0,4p(X_n = 1)$$
   puis montrer par récurrence que $p(X_n = 1) = 2(0,4)^n - 2(0,1)^n$

EXERCICE 10 :

Une urne contient initialement des boules blanches et des boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On effectue des tirages successifs d'une boule et l'on suit le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, c boules de la couleur de celle qui vient d'être tirée. ($c \in \mathbb{N}^*$, entier fixé)

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. ($(b, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$).
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premeir tirage ?
   (b) Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?
   (c) On effectue 3 tirages. Quelle est la probabilité d'obtenir successivement une blanche, une rouge et une blanche ?
   (d) On suppose que $r = c$. On effectue n tirages. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules blanches ?
2. Pour tout entier naturel non nuls n, x, y on note $u_n(x, y)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n-$ième tirage, lorsque l'urne contient au départ x boules blanches et y boules rouges.
   (a) Soit $(n, x, y) \in (\mathbb{N}^*)^3$. En utilisant un système complet d'événements associé au premeir tirage, montrer que

$$u_{n+1} = u_n(x+c,y)\frac{x}{x+y} + u_n(x,y+c)\frac{y}{x+y}$$

(b) En déduire par récurrence que $u_n(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

EXERCICE 11 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{2}{x}\right) - x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) < 0$.
2. Donner une suite (u_n) de limite 0 telle que pour tout n, $f'(u_n) = 1$. Que peut-on en déduire pour f' en 0 ?

EXERCICE 12 :

Partie A :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et g une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.

1. Soit Ψ l'application définie sur $[a,b]$ par :
$$\forall t \in [a,b],\ \Psi(t) = g(t) - g(a) - g'(a)(t-a) - K(t-a)^2$$
Déterminer la constante K pour que $\Psi(b) = 0$.

En appliquant deux fois le théorème de Rolle aux fonctions Ψ et Ψ', montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que $\Psi''(d) = 0$.
En déduire qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que

$$g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}g''(d).$$

Partie B :

On considère les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\text{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la parité de f.
2. Monter que la fonction f est continue en 0.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, en utilisant la partie A. montrer qu'il existe un réel d_x compris entre 0 et x tel que
$$\text{sh}(x) = x + \frac{x^2}{2}\text{sh}(d_x)$$
   (b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\text{sh}(x) - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}|\text{sh}(x)|$
   (c) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

EXERCICE 13 :

1. Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction continue sur $[a,b]$.
   (a) Montrer qu'il existe une réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Le réel x_0 s'appelle un point fixe de f.
   (b) On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$ et qu'il existe un réel k, $0 \leqslant k < 1$, tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leqslant k$.

   i. Montrer que le point fixe de f sur $[a, b]$ est unique.
   ii. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que cette suite converge vers x_0.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = (1 + x)^{1/3}$
   (a) Montrer que g admet un seul point fixe sur l'intervalle $[1, 2]$ que l'on notera α.
   (b) Donner une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α et une majoration de l'erreur.
   (c) En déduire un entier n tel que $|v_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.
3. Soit (E) l'équation $x^3 - x - 1 = 0$.
   (a) Montrer que (E) admet pour unique solution sur l'intervalle $[1, 2]$ le réel α.
   (b) Donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-3} près.