KHÔLLE 2 : Eléments de correction

EXERCICE 1

1. Séries géométriques : critère de convergence + formules de la somme.
2. Rappeler les éléments caractéristiques de la loi géométrique.
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0;1[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

CORRECTION :

1. COURS.
2. COURS.
3. Soit X une VA suivant la loi géométrique $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \geq 1, \quad P(X=k) = pq^{k-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\
&= p\sum_{k=0}^{+\infty} q^{k} \qquad \text{en posant } k = k-1 \\
&= p \times \frac{1}{1-q} \qquad \text{série géom cv car } q = 1-p \in]0;1[\text{ donc } |q| < 1 \\
&= \frac{p}{p} \qquad \text{car } p = 1-q \\
&= 1
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

1. Donner le SCE associé à une variable aléatoire.
2. On effectue 10 lancers successifs d'un dé équilibré à 6 faces. Déterminer la probabilité de n'obtenir aucun 6.

CORRECTION :

1. Si X est une VA de support $X(\Omega)$ alors $((X=k))_{k \in X(\Omega)}$ est un SCE.
2. On pose X la VA égale au nombre de 6 obtenu sur les 10 lancers.
   La variable X compte le nombre de succès lors de 10 répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 1/6$.
   Ainsi X suit la loi $\mathcal{B}(10, 1/6)$.
   On cherche la probabilité de n'obtenir aucun 6 sur les 10 lancers, soit la probabilité $P(X=0)$.
   Or $P(X=0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,16$.

KHÔLLE 2 : Eléments de correction

EXERCICE 1

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. Rappeler les éléments caractéristiques de la loi binomiale.
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$.

CORRECTION :

1. $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
2. COURS.
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= (p+q)^n \qquad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= 1^n \qquad \text{car } q = 1-p \\
&= 1
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

1. Ecrire la formule des probabilités totales dans le cas fini.
2. On effectue des lancers successifs d'une pièce équilibrée. Déterminer le nombre moyen de lancer qu'il faut faire pour obtenir face pour la première fois.

CORRECTION :

1. COURS.
2. On note X la VA égale au rang du lancer amenant face pour la première fois.
   La variable X donne donc le rang d'apparition du 1er succès au cours d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre $p = 1/2$ (la pièce est équilibrée).
   On cherche $E(X)$, le nombre moyen de lancers pour obtenir le 1er face.
   D'après le cours, on sait que $E(X) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
   Il faut donc en moyenne 2 lancers pour obtenir le 1 er face.
   EXO : reprendre cet exercice avec $p \in]0;1[$ quelconque.
   EXO ++ : déterminer le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir le 2ème face.

KHÔLLE 2 : Eléments de correction

EXERCICE 1

1. Séries exponentielles : critère de convergence + formule de la somme.
2. Donner les éléments caractéristiques de la loi de Poisson (support, loi, espérance, variance).
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

CORRECTION :

1. COURS.
2. COURS.
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \geq 0, \quad P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \times e^{\lambda} \qquad \text{série expo cv} \\
&= 1
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

On lance indéfiniment une pièce amenant pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On note X la variable aléatoire égale au rang du lancer donnant le premier pile et Y la variable aléatoire égale au rang du lancer donnant le deuxième pile.

1. Reconnaître la loi de X. Donner son espérance et sa variance.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner le SCE associé à X.
4. Déterminer le support de Y puis sa loi.
5. Montrer que Y admet une espérance.
   indication : on pourra étudier la convergence d'une série.
6. Quel le nombre moyen de lancers faut il faire pour obtenir le deuxième pile ?

CORRECTION :

1. La VA X donne le rang d'apparition du 1er succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre p.
   Donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p) \Rightarrow E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{p}{q^2}$.
2. Deux variables sont indépendantes si
   $$\forall (k,\ell) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P\left((X=k) \cap (Y=\ell)\right) = P(X=k) \times P(Y=\ell).$$
   Or nous avons des incompatibilités entre X et Y. En effet, $(X=2) \cap (Y=2)$ et impossible car au 2ème lancer on ne peut avoir à la fois pile et face !
   Or, pris indépendamment, les évènements $(X=2)$ et $(Y=2)$ sont possibles.
   Il s'ensuit que $P\left((X=2) \cap (Y=2)\right) = 0 \neq P(X=2) \times P(Y=2)$.
   Ainsi les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $((X=k))_{k \geq 1}$ forme un SCE.

4. Le deuxième pile peut arriver à n'importe quel rang à partir du rang 2 $\Rightarrow Y(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$.
Calcul de la loi de Y :
A l'aide du SCE $((X=k))_{k\geq 1}$, d'après la FPT pour tout $\ell \geq 2$ on a :

$$P(Y=\ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{(X=k)}(Y=\ell) \times P(X=k) \qquad \text{somme infinie}$$

Or, pour tout $k \geq 1$, si le 1er pile est arrivé au k-ième lancer, alors le 2ème pile ne peut arriver qu'après.
Ainsi $\forall k \geq \ell, \quad P_{(X=k)}(Y=\ell) = 0$.
Par conséquent dans la somme précédente, seuls les termes d'indices $k < \ell$ ne sont pas nuls et donc

$$P(Y=\ell) = \sum_{k=1}^{\ell-1} P_{(X=k)}(Y=\ell) \times P(X=k) \qquad \text{somme finie}$$

De plus, pour tout $k \in [\![1; \ell-1]\!]$, si le 1er pile est arrivé au k-ième lancer, alors le 2ème pile arrive au ℓ-ième si à partir du $(k+1)$-ième lancer nous avons une succession de face puis un pile.
Plus précisément, si P_i : « on obtient pile au i-ème lancer »et $F_i = \overline{P_i}$, alors :

$$\forall k \in [\![1; \ell-1]\!], \quad P_{(X=k)}(Y=\ell) = P\left(F_{k+1} \cap \ldots \cap F_{\ell-1} \cap P_\ell\right)$$

Entre 2 entiers a et b il y a $b-a+1$ entiers. Donc ici nous avons $\ell - 1 - (k+1) + 1 = \ell - k - 1$ faces.
Par indépendances des lancers nous avons donc

$$\forall k \in [\![1; \ell-1]\!], \quad P_{(X=k)}(Y=\ell) = q^{\ell-k-1}p$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} P(Y=\ell) &= \sum_{k=1}^{\ell-1} P_{(X=k)}(Y=\ell) \times P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1} q^{\ell-k-1}p \times q^{k-1}p \\ &= p^2 q^{\ell-2} \sum_{k=1}^{\ell-1} 1 \qquad \text{la somme comporte } \ell-1 \text{ termes} \\ &= (\ell-1)p^2q^{\ell-2} \end{aligned}$$

5. La variable Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{\ell\geq 2} \ell P(Y=\ell)$ converge (notez bien l'indice).

$$\begin{aligned} \sum_{\ell\geq 2} \ell P(Y=\ell) &= \sum_{\ell\geq 2} \ell(\ell-1)p^2q^{\ell-2} \\ &= p^2 \sum_{\ell\geq 2} \ell(\ell-1)q^{\ell-2} \qquad \text{on reconnait une série géom dérivée 2nde cv car } q = 1-p \text{ et donc } |q| < 1 \end{aligned}$$

On peut donc affirmer que la série $\sum_{\ell\geq 2} \ell P(Y=\ell)$ converge et donc que Y admet une espérance.
De plus,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \ell P(Y=\ell) \qquad \text{notez bien l'indice} \\ &= p^2 \sum_{\ell=2}^{+\infty} \ell(\ell-1)q^{\ell-2} \\ &= p^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} \\ &= \frac{2}{p} \qquad \text{car } q = 1-p \end{aligned}$$

6. Le nombre moyen de lancers faut il faire pour obtenir le deuxième pile correspond à $E(Y)$.
Si la pièce est équilibrée alors, d'après la question précédente, il faut en moyenne $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ lancers pour obtenir le 2ème pile (ce qui semble cohérent).