Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **scientifique**

Voie : **Physique et technologie (PT)**

Discipline : **Mathématiques**

Seconde année

Classe préparatoire PT
Programme de mathématiques

Table des matières

Objectifs de formation **2**
- Description et prise en compte des compétences . . . 2
- Unité de la formation scientifique . . . 3
- Architecture et contenu du programme . . . 4
- Organisation du texte . . . 4
- Usage de la liberté pédagogique . . . 5

Programme **6**
- Algèbre linéaire . . . 6
  - A - Compléments d'algèbre linéaire . . . 6
  - B - Déterminants . . . 7
  - C - Réduction des endomorphismes et des matrices . . . 8
- Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens . . . 9
  - A - Structure préhilbertienne . . . 9
  - B - Isométries d'un espace euclidien . . . 10
- Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées du plan . . . 11
- Intégrales généralisées . . . 13
- Séries numériques . . . 14
- Séries entières . . . 15
- Probabilités discrètes . . . 16
  - A - Espaces probabilisés . . . 16
  - B - Variables aléatoires discrètes . . . 17
- Équations différentielles et systèmes différentiels . . . 20
- Fonctions de deux ou trois variables . . . 21
  - A - Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ ($p = 2$ ou 3) . . . 21
  - B - Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ ($p \leqslant 3$, $n \leqslant 3$) . . . 22
  - C - Intégrales dépendant d'un paramètre . . . 22
- Courbes et surfaces dans l'espace . . . 23

Le programme de mathématiques de PT, dans le prolongement de celui de PTSI, s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.

Objectifs de formation

La formation mathématique en classe préparatoire scientifique vise deux objectifs :
- l'acquisition d'un solide bagage de connaissances et de méthodes permettant notamment de passer de la perception intuitive de certaines notions à leur appropriation, afin de pouvoir les utiliser à un niveau supérieur, en mathématiques et dans les autres disciplines. Ce degré d'appropriation suppose la maîtrise du cours, c'est-à-dire des définitions, énoncés et démonstrations des théorèmes figurant au programme ;
- le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

Pour répondre à cette double exigence, et en continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique permet de développer :
- **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemple, la géométrie apparaît comme un champ d'utilisation des concepts développés en algèbre linéaire et euclidienne ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
Percevoir la globalité et la complexité du monde réel exige le croisement des regards disciplinaires et les mathématiques interagissent avec des champs de connaissances partagés par d'autres disciplines. Aussi le programme valorise-t-il l'interprétation des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure de grandeurs, incertitudes...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation et d'établir des liens avec les autres disciplines.

Le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année, introduit la notion de déterminant en dimension quelconque et aboutit à la théorie de la réduction dont il développe quelques applications. Le second, consacré à l'algèbre euclidienne, met l'accent sur les relations entre les points de vue vectoriel, matriciel et géométrique, notamment à travers une étude spécifique aux dimensions deux et trois. Le théorème spectral établit un lien entre ces deux volets et permet la classification des coniques.

Le programme d'analyse est introduit par l'étude des fonctions vectorielles d'une variable réelle qui s'attache à relier les registres analytique et géométrique en développant une étude aussi bien affine que métrique des arcs paramétrés. L'étude des enveloppes insiste sur la vision géométrique et conduit à celle de la développée d'une courbe régulière.
L'étude de l'intégration, entamée en première année dans le cadre des fonctions continues sur un segment, se poursuit dans celui des fonctions continues sur un intervalle quelconque. L'intégrale généralisée est un intermédiaire à l'introduction de la notion de fonction intégrable, qui permet d'énoncer les théorèmes classiques sur les intégrales à paramètre.
Le chapitre relatif aux séries numériques a pour objectif la détermination de la nature d'une série par comparaison avec les séries de référence et se limite au cas de la convergence absolue. Il constitue une introduction à l'étude des séries entières qui sont utilisées pour développer une fonction en série, calculer la somme de certaines séries numériques, trouver des solutions d'une équation différentielle, ou encore définir les séries génératrices en probabilités.
L'étude des équations et des systèmes différentiels est limitée au cas linéaire, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'origine analytique. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle.
Le chapitre relatif au calcul différentiel à plusieurs variables fournit le vocabulaire et quelques outils utiles à la résolution de problèmes pouvant être issus d'autres disciplines scientifiques (recherche d'extremum, équations aux dérivées partielles). Il concourt au développement des compétences « Calculer » et « Représenter ».
L'étude des surfaces présente deux modes de représentation : paramétrage et équation cartésienne. Les exemples des surfaces réglées et des surfaces de révolution fournissent l'occasion de passer du registre analytique au registre géométrique et vice versa ; l'outil informatique est recommandé pour la visualisation des surfaces et de leurs sections planes.

L'enseignement des probabilités présente brièvement le formalisme de Kolmogorov, qui sera repris dans le cursus ultérieur des étudiants. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes, en prolongement des variables finies étudiées en première année, ce qui permet d'élargir aux processus stochastiques à temps discret le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.
La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants. L'inégalité qui la sous-tend précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion.
Ce chapitre a vocation à interagir avec le reste du programme.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
Le programme est décliné en chapitres. Chaque chapitre comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.
En particulier, l'ordre de présentation des différents chapitres ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;

– celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés par le symbole $\leftrightarrows$ PC pour la physique et la chimie, $\leftrightarrows$ SI pour les sciences industrielles de l'ingénieur et $\leftrightarrows$ I pour l'informatique.

Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

– pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est en effet d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Quel que soit le contexte (cours, travaux dirigés), la pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants ;
– didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

Programme

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments d'algèbre linéaire

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année.*
- *étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, projecteurs, hyperplans, sous-espaces stables, trace.*
- *passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques en dimensions 2 *et* 3 *et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Familles quelconques de vecteurs	
Famille libre, famille génératrice, base.	Extension des résultats vus en première année sur les familles finies de vecteurs.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.	Toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\deg(P_k) = k$ pour tout k est une base de $\mathbb{K}[X]$.
b) Sous-espaces vectoriels	
Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe. En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe.	Par définition, la somme F de p sous-espaces F_i est directe si tout vecteur de F se décompose de manière unique selon les F_i. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Pour $p \geqslant 3$, toute autre caractérisation est hors programme.
Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie, défini comme sous-espace admettant une droite comme supplémentaire. Équations d'un hyperplan. Équations d'un sous-espace vectoriel : si E est de dimension n, l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n-p$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans.	Interprétation géométrique de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.
c) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel	
Homothétie. Projecteur et symétrie associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Caractérisations $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Famille de projecteurs associés à une décomposition en somme directe.	
Propriété : $p_i \circ p_j = 0$, $p_1 + \cdots + p_m = \mathrm{Id}_E$.	L'obtention de la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}(p_i)$ à partir de cette propriété est hors programme.
d) Sous-espaces stables	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.	Les étudiants doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de stabilité d'un sous-espace et, inversement, traduire cette stabilité sous forme matricielle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Matrices	
Matrices semblables. Trace d'une matrice carrée. Linéarité, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.	Interprétation en termes d'endomorphismes.

B - Déterminants

Les déterminants, introduits en première année dans le cadre de la géométrie du plan ou de l'espace, sont généralisés à la dimension n et aux cadres matriciel et vectoriel.
Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd.
Le vocabulaire des formes multilinéaires alternées, le groupe symétrique et les formules de Cramer sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que : *i.* le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ; *ii.* l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ; *iii.* le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1.	Notation det. La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Pour $n \in \{2,3\}$, on interprète géométriquement cette définition par les notions d'aire et de volume algébriques.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.	
Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	
Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes.	⇆ I : calcul du déterminant d'une matrice.
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	
Déterminant d'un produit de matrices carrées.	Démonstration hors programme.
Déterminant de l'inverse.	
Déterminant de la transposée.	Démonstration hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. La notion de comatrice est hors programme.
c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	La formule de changement de base pour un déterminant est hors programme. Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice.

C - Réduction des endomorphismes et des matrices

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres en dimension quelconque, cette partie s'intéresse de manière plus approfondie au cas de la dimension finie, et à la question de la diagonalisabilité d'une matrice carrée.
L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.
La notion de polynôme annulateur est hors programme. L'étude des classes de similitude est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque.	Interprétation en termes de droite stable. ⇆ SI : matrice d'inductance, inductance cyclique, inductance homopolaire.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.	
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres.	Le polynôme caractéristique, défini par la fonction polynomiale $x \mapsto \chi_f(x) = \det(x\mathrm{Id}_E - f)$ est de coefficient dominant égal à 1.
Spectre d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(f)$, $\mathrm{Sp}(A)$.
Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Il est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre associé.	
Éléments propres et polynôme caractéristique d'une matrice.	Extension des définitions et des résultats précédents.
b) Endomorphismes et matrices diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	
Matrices diagonalisables.	Extension aux matrices des définitions et des résultats précédents relatifs aux endomorphismes. ⇆ SI : machines électriques.
c) Endomorphismes et matrices trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.	Démonstration hors programme. Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme.
Expressions du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrices trigonalisables.	Extension aux matrices des définitions et des résultats précédents relatifs aux endomorphismes. ⇆ I : calcul de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux puissances itérées consécutives.
d) Applications	
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. Structure de l'ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre p à coefficients constants. Équation caractéristique.	Les étudiants doivent savoir transformer une récurrence scalaire d'ordre p en une récurrence vectorielle d'ordre 1 du type $X_{n+1} = AX_n$. Les étudiants doivent savoir trouver une base de l'espace vectoriel des solutions dans le cas d'une relation d'ordre 2 et dans le cas d'une relation d'ordre p lorsque la matrice A possède p valeurs propres distinctes.

Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces euclidiens ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions* 2 *et* 3 *en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *traiter la réduction des matrices symétriques réelles et l'appliquer à la classification et l'étude des coniques.*

A - Structure préhilbertienne

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire et norme	
Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien. Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$. Exemples de produits scalaires définis par une intégrale sur les espaces de fonctions et de polynômes. Norme préhilbertienne, distance associée. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Identité du parallélogramme, identité de polarisation.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$. On peut identifier $\mathbb{R}^n$ et l'espace des vecteurs colonnes correspondant.
b) Orthogonalité en dimension quelconque	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Théorème de Pythagore. Famille orthogonale, famille orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $F^{\perp}$. Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre l'algorithme dans le cas d'un nombre restreint de vecteurs. ⇆ I : calcul d'une base orthonormée de polynômes pour différents exemples de produit scalaire.
c) Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormales en dimension finie.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale ; expression du produit scalaire et de la norme.	$x_i = \langle e_i \vert x\rangle$. ⇆ PC/SI.
Expression matricielle du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.	Formules $\langle x, y\rangle = X^{\mathrm{T}} Y$, $\Vert x\Vert^2 = X^{\mathrm{T}} X$.
Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale.	Formule $a_{i,j} = \langle e_i \vert f(e_j)\rangle$.
d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.	
Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	Les étudiants doivent savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sous-espace F en calculant son expression dans une base orthonormale de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F. ⇆ I : programmation de ces méthodes.
Inégalité de Bessel.	
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise la distance de x à un vecteur de F.	
Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.	Notation $d(x, F)$. Application à la recherche du minimum.

B - Isométries d'un espace euclidien

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale.	
Symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace. Réflexion.	
Groupe orthogonal d'un espace euclidien E.	Notation $O(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Si un sous-espace est stable par une isométrie vectorielle, son orthogonal l'est aussi.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M^{\mathrm{T}} M = I_n$.	
Caractérisation à l'aide des colonnes ou des lignes de M.	
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormale de E, une base $\mathscr{B}$ de E est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est orthogonale.	
Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est une isométrie vectorielle de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle.	
Isométrie vectorielle positive, isométrie vectorielle négative.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}(E)$.

c) Description des isométries vectorielles des espaces euclidiens orientés de dimensions 2 et 3

Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Base directe, base indirecte.	
Description des isométries vectorielles du plan et de l'espace à partir des éléments propres des matrices de $O(2)$ et de $O(3)$.	Les étudiants doivent savoir déterminer les caractéristiques géométriques d'une isométrie.

d) Matrices symétriques réelles

Matrice symétrique réelle.	Notation $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme. ⇆ PC/SI : matrice d'inertie.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.	
Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $D = P^{-1}AP$.	Démonstration hors programme.

e) Coniques

Une conique est définie par une équation du type $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.	
Équation réduite.	Les étudiants doivent savoir utiliser la réduction de la matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ pour obtenir une équation réduite.
Classification, paramétrage.	Interprétation géométrique des éléments propres de $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$: axes de symétrie, demi-axes d'une ellipse, asymptotes d'une hyperbole.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées du plan

Le chapitre sur les fonctions vectorielles trouve une illustration naturelle dans l'étude des courbes paramétrées.
Il convient de mettre en évidence et en relation les différents modes de représentation des courbes du plan (paramétrage, équation cartésienne, cas d'un graphe), et de formaliser des notions géométriques (courbe paramétrée, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.
La notion d'arc géométrique étant hors programme et l'utilisation des changements de paramétrage réduite à la paramétrisation par l'abscisse curviligne, on identifie les courbes paramétrées avec l'arc géométrique dont ils sont un représentant.
L'étude des propriétés métriques d'une courbe paramétrée et celle de l'enveloppe d'une famille de droites privilégient la vision géométrique plutôt que le recours à l'application de formules.
L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.	Interprétation de la norme en termes de distance.
Boule ouverte, boule fermée.	
Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées.	Toutes les définitions sont illustrées par des figures.
Point intérieur, point extérieur, point adhérent à une partie. Frontière.	Les points de la frontière de A sont les points x tels que toute boule ouverte centrée en x rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur de A.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	
Limite en un point. Continuité en un point. Continuité globale.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Vecteur dérivé à droite et à gauche en un point. Fonction dérivée.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'une composée, d'un produit.	La dérivée du produit s'applique au produit d'une fonction numérique par une fonction vectorielle, au produit scalaire de deux fonctions vectorielles et au produit vectoriel de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées successives d'une combinaison linéaire, d'un produit (formule de Leibniz).	
Formule de Taylor-Young. Interprétation cinématique.	Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$. $\leftrightarrows$ PC,SI : vecteurs vitesse et accélération.
c) Courbes paramétrées du plan	
Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Une demi-tangente en un point est définie comme limite à droite ou à gauche des sécantes. Point régulier, courbe régulière. Tangente en un point régulier.	Notation $t \mapsto M(t)$.
Étude locale en un point régulier ou stationnaire, tangente et position relative. Définition géométrique des points d'inflexion et de rebroussement.	Les étudiants doivent savoir utiliser des développements limités pour les études locales.
Branches infinies.	Les étudiants doivent savoir utiliser des développements asymptotiques pour étudier les branches infinies.
Support d'une courbe paramétrée. Construction à partir de tableaux de variations.	$\leftrightarrows$ I : tracé de courbes paramétrées.
d) Propriétés métriques d'une courbe plane	
Longueur d'une courbe paramétrée régulière. Abscisse curviligne, paramétrage par une abscisse curviligne.	
Repère de Frenet $(M;\overrightarrow{T},\overrightarrow{N})$, normale, formules de Frenet, courbure en un point régulier.	La courbure est définie par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}=\gamma\overrightarrow{N}$.
Orientation d'une courbe.	L'orientation d'une courbe régulière peut se faire par le choix d'un vecteur unitaire dirigeant la tangente ou par celui d'un sens de parcours de la courbe. La formule donnant la courbure à partir du déterminant de la vitesse et de l'accélération est hors programme.
Théorème de relèvement : si $t \mapsto M(t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$, existence d'une fonction α de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\overrightarrow{T}(t)=\cos(\alpha(t))\vec{\imath}+\sin(\alpha(t))\vec{\jmath}$. Expression de la courbure $\gamma=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$. Rayon de courbure en un point birégulier. Centre de courbure. Cercle de courbure.	Démonstration hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Enveloppe d'une famille de droites. Développée.	
Enveloppe d'une famille de droites données par une représentation paramétrique $t \mapsto A(t) + \lambda \overrightarrow{u}(t)$ où A et $\overrightarrow{u}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$: on cherche une fonction λ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $t \mapsto A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$ paramètre une courbe dont la tangente au point courant est dirigée par $\overrightarrow{u}(t)$. Développée d'une courbe régulière : ensemble des centres de courbure. Caractérisation comme enveloppe des normales.	L'objectif est de privilégier une vision géométrique de la notion d'enveloppe et du procédé permettant de l'obtenir. ⇆ I : tracé d'enveloppes.

Intégrales généralisées

L'objectif de ce chapitre est double :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues, la notion de fonction intégrable.*

Afin de ne pas alourdir le vocabulaire, la locution « intégrale absolument convergente » ne figure pas au programme.
L'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.
Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle	
Pour $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $b > a$ ou $b = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures. Si tel est le cas, on note cette limite $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.	
Théorèmes de comparaison pour les fonctions continues et de signe constant sur $[a, b[$ sous les hypothèses $f \leqslant g$ ou $f(t) \underset{\substack{t \to b \\ t<b}}{\sim} g(t)$.	Il suffit de vérifier l'hypothèse $f \leqslant g$ au voisinage de b.
Adaptation aux fonctions définies sur un intervalle $]a, b]$, avec $a < b$ ou $a = -\infty$, puis sur un intervalle $]a, b[$.	
Intégrales de référence : $$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t,\ \int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t.$$	Les étudiants doivent connaître la nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ selon le signe de α.
Relation de Chasles.	
Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle	
Une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite intégrable sur I si $\int_a^b \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ est convergente, où $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.	Notation $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. L'intégrabilité sur I est équivalente à l'intégrabilité sur l'intérieur de I.
Si f est intégrable sur I, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.	Utilisation des parties positive et négative, des parties réelle et imaginaire.
Linéarité, positivité et croissance de l'application $f \mapsto \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.	
Espace vectoriel des fonctions continues intégrables sur I.	Il coïncide avec l'espace des fonctions continues si I est un segment.
Pour f continue et intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, inégalité $$\left\lvert \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert \leqslant \int_I \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration non exigible pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si f est une fonction continue sur I telle que $\int_I \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur I.	
Théorème de comparaison pour les fonctions continues et intégrables sur $[a,b[$: si g est intégrable sur $[a,b[$ et si $f(t) \underset{\substack{t\to b\\ t<b}}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable sur $[a,b[$.	Les étudiants peuvent directement utiliser le théorème de comparaison sous l'hypothèse $f(t) \underset{\substack{t\to b\\ t<b}}{=} o(g(t))$. Adaptation du théorème de comparaison aux fonctions définies sur un intervalle $]a,b]$.

Séries numériques

Cette partie étend l'étude des séries à termes positifs vue en PTSI à celle des séries à termes réels et complexes, en introduisant la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes.
L'étude des séries semi convergentes n'est pas un objectif du programme et celle des séries alternées est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Compléments sur les séries à termes positifs	
Théorème de comparaison série-intégrale : si f est une fonction définie sur $[n_0,+\infty[$, positive, continue et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.	Exemples de calcul approché, de majoration et de recherche d'équivalents des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente. Exemples d'accélération de la convergence.
Développement décimal d'un nombre réel.	Caractérisation des nombres rationnels par périodicité de leur développement décimal à partir d'un certain rang. Aucune démonstration n'est exigible. $\leftrightarrows$ I : représentation des nombres réels par des flottants.
b) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.	
La convergence absolue implique la convergence.	Utilisation des parties positive et négative, des parties réelle et imaginaire.
Inégalité triangulaire.	
Théorème de comparaison : si v_n est le terme général positif d'une série convergente et si $u_n = O(v_n)$, alors Σu_n converge absolument.	Les étudiants peuvent directement utiliser le théorème de comparaison sous l'hypothèse $u_n = o(v_n)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Règle de d'Alembert.	
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	Démonstration non exigible.

Séries entières

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant au cas d'une variable réelle ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

La théorie des séries entières sera appliquée au cas des séries génératrices dans le chapitre dédié aux variables aléatoires discrètes et à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Rayon de convergence	
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence défini comme la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée.	Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$ et diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$. La formule $R = \lim \left\lvert \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert$ est hors programme.
Si $\lvert a_n\rvert \leqslant \lvert b_n\rvert$ à partir d'un certain rang, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$.	
Si $a_n \sim b_n$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.	
Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert réel de convergence.	L'étude de la convergence au bord du disque ou de l'intervalle de convergence n'est pas un objectif du programme.
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	Démonstration non exigible.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle	
Fonction somme d'une série entière.	
Continuité de la fonction somme sur son intervalle ouvert de convergence.	Démonstration hors programme.
La somme de la série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme.	Démonstration hors programme.
Relation entre les coefficients et les dérivées successives en 0.	
Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	Démonstration hors programme.
c) Fonctions développables en série entière.	
Fonction développable en série entière au voisinage de 0.	Série de Taylor.
Unicité du développement en série entière.	
Développements usuels : $$\mathrm{e}^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \mathrm{ch}\, x,\ \mathrm{sh}\, x,\ \frac{1}{1-x},\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha.$$	Les étudiants doivent savoir obtenir un développement en série entière à l'aide de différentes méthodes : étude de la série de Taylor, unicité de la solution à un problème de Cauchy linéaire, produit de Cauchy.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe.	
Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert. Pour tout nombre complexe z, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et sa somme vaut $\exp(z)$. Exponentielle d'une somme.	L'exponentielle complexe a été définie en première année par $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Probabilités discrètes

Ce chapitre permet de développer les capacités suivantes :

– *modéliser des situations aléatoires par le choix d'un espace probabilisé ou de variables aléatoires adéquats ;*

– *maîtriser le langage et le formalisme spécifiques aux probabilités.*

A - Espaces probabilisés

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensemble fini ou dénombrable. Dénombrabilité de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.
b) Espaces probabilisés	
Si Ω est un ensemble, une tribu sur Ω est une partie $\mathscr{A}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que : i. $\Omega \in \mathscr{A}$, ii. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$, iii. Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathscr{A}$. Si Ω est un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$ telle que : i. $P(\Omega) = 1$, ii. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$ On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ où $\mathscr{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.	L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.

Contenus	Capacités & Commentaires
Propriétés : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$, i. $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$. ii. Continuité croissante : si, pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$, alors : $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$. iii. Continuité décroissante : si, pour tout n, $A_{n+1} \subset A_n$, alors : $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$. iv. Sous additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	

c) Conditionnement et indépendance

Contenus	Capacités & Commentaires
Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$	Notation : $P_B(A)$, $P(A\mid B)$. L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Ce paragraphe étend rapidement les concepts et résultats vus dans le cadre des univers finis.
Formules des probabilités composées. Système complet dénombrable d'événements.	
Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\mid A_n)\,P(A_n)$$	On adopte la convention $P(B\mid A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$. La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
Formule de Bayes. Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A) = P(A)$.
Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas toujours l'indépendance mutuelle.

B - Variables aléatoires discrètes

a) Généralités

Contenus	Capacités & commentaires
Une application X définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et si l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathscr{A}$.	Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement. Notation $(X\in U)$, $\{X\in U\}$.
Loi d'une variable aléatoire discrète.	
Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Croissance, limites en $-\infty$ et en $+\infty$.	$F_X(x) = P(X \leqslant x)$. L'étude des propriétés de continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme.
Si X prend ses valeurs dans $\{x_n\,;\ n\in\mathbb{N}\}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(X = x_n) = p_n$.	Démonstration hors programme.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Extension aux variables discrètes des notions de loi conjointe, de loi marginale et de loi conditionnelle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dites indépendantes si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$	Démonstration hors programme.
Variables mutuellement indépendantes.	Extension sans démonstration aux variables discrètes des notions et des résultats vus en première année. On admet l'existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables aléatoires indépendantes de lois discrètes données.

b) Espérance et variance

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathrm{E}(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\Sigma P(X = x_n)\, f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, f(x_n).$$	Démonstration hors programme.
Linéarité de l'espérance. Positivité, croissance.	Démonstration hors programme.
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Démonstration hors programme.
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie. Si X^2 est d'espérance finie, on appelle variance de X le réel $$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2.$$ Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$. Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, égalité $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	
Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.	Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.
Covariance, coefficient de corrélation.	
Encadrement $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.	Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Variance d'une somme de deux variables aléatoires ; cas de variables indépendantes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, séries génératrices	
Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n.$$ Le rayon de convergence est au moins égal à 1.	La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.
La variable aléatoire X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$.	Démonstration non exigible.
La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Démonstration non exigible. Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence.
Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.	
d) Lois usuelles	
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si : $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
Série génératrice, espérance et variance.	
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$	La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Loi de Poisson de paramètre λ. Série génératrice, espérance et variance. Somme de variables suivant une loi de Poisson.	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. ⇆ PC : compteur Geiger.
e) Résultats asymptotiques	
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Démonstration non exigible. Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares. La notion de convergence en loi est hors programme. ⇆ I : simulation de cette approximation.
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathrm{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$: $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$	Interprétation statistique. Estimation : pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$ ⇆ I : simulation d'une suite de tirages.

Équations différentielles et systèmes différentiels

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres un et deux, abordée en première année, se poursuit par celle des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 *et des équations scalaires à coefficients non constants, en mettant l'accent sur les équations d'ordre deux. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :*

- *la forme des solutions ;*
- *le théorème de Cauchy linéaire ;*
- *le lien entre les équations scalaires et les systèmes différentiels d'ordre un ;*
- *la résolution explicite.*

Ce chapitre favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Équations différentielles scalaires d'ordre 2	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme. ⇆ I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée d'un problème de Cauchy.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur un intervalle où a et b sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. Équation avec second membre $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Forme des solutions : somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation homogène. Principe de superposition des solutions. Résolution dans le cas où on connaît une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas.	Recherche de solutions développables en série entière.
b) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	
Écriture sous la forme $X' = AX + B(t)$ où A est une matrice réelle ou complexe de taille n à coefficients constants et B une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ continue. Équivalence entre une équation scalaire d'ordre n et un système de n équations d'ordre 1.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme.
Structure de l'ensemble des solutions.	Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable ou triangulaire.
Comportement asymptotique des solutions en fonction du signe de la partie réelle des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable.	⇆ PC : stabilité des solutions, état d'équilibre.

Fonctions de deux ou trois variables

L'étude des fonctions de plusieurs variables est tournée vers les applications : résolution sur des exemples d'équations aux dérivées partielles, problèmes d'extremums, intégrales dépendant d'un paramètre.
On se limite aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \leqslant 3$.
La notion de différentielle n'est pas au programme, mais sa notation y figure pour faire le lien avec l'enseignement de Physique-Chimie.
L'interprétation géométrique de certains concepts et leur illustration par des figures dans le cas où $p = 2$ et $n \leqslant 2$ concourent à développer la compétence « Représenter ».
Par les différentes notations introduites dans ce chapitre et la technicité nécessitée par leur manipulation, celui-ci contribue également à la mise en œuvre de la compétence « Calculer ».
L'étude des intégrales dépendant d'un paramètre apporte un fondement mathématique à la transformée de Laplace utilisée en sciences de l'ingénieur. La vérification de l'hypothèse de domination permet de développer la compétence « Calculer ».

A - Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ ($p = 2$ ou 3)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite et continuité	
Limite en un point adhérent. Continuité en un point. Continuité sur une partie. Opérations sur les fonctions continues.	Les problèmes de prolongement par continuité ne sont pas un objectif du programme.
Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.	Démonstration hors programme.
b) Dérivées partielles	
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point intérieur.	Notations $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Gradient.	⇆ PC : notation ∇f.
Point critique.	
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Démonstration hors programme. ⇆ PC : notation $\mathrm{d}f = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$. La définition de la différentielle est hors programme.
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$.	
Dérivées partielles d'ordre 2 en un point intérieur.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $\partial_1\partial_2 f(a)$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert. Théorème de Schwarz.	Démonstration hors programme.
c) Extremums d'une fonction de deux variables	
Extremum local, extremum global. Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^2$.	Démonstration hors programme.
Matrice hessienne.	
Nature d'un point critique lorsque la matrice hessienne est inversible.	Les étudiants doivent savoir utiliser la réduction de la matrice hessienne. La caractérisation par le signe de $rt - s^2$ est hors programme.
Exemples de recherche de maximums ou minimums locaux, de points cols.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.	

d) Courbes du plan définies par une équation cartésienne

Contenus	Capacités & Commentaires
Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier. Équation de la tangente en un point régulier.	On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$.
En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.	⇆ PC : lignes équipotentielles et lignes de champ. ⇆ I : tracé de lignes de niveau.

B - Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ ($p \leqslant 3$, $n \leqslant 3$)

Contenus	Capacités & commentaires

a) Limite et continuité

Contenus	Capacités & commentaires
Limite en un point adhérent. Continuité en un point. Continuité sur une partie de $\mathbb{R}^p$.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.

b) Dérivées partielles

Contenus	Capacités & commentaires
Dérivées partielles d'ordres 1 et 2. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^2$.	Expression coordonnée par coordonnée.
Calcul des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de $(u, v) \mapsto f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$. Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Utilisation de la dérivée de $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$. Cas particulier du passage en polaire. Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables fourni par l'énoncé. L'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu. ⇆ PC : équation du transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

C - Intégrales dépendant d'un paramètre

Contenus	Capacités & commentaires

a) Théorème de continuité

Contenus	Capacités & commentaires
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$, telle que : i. pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur J ; ii. pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ; iii. il existe une fonction φ positive, continue et intégrable sur J, telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, $\lvert f(x, t)\rvert \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination). Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.	Démonstration hors programme. Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire. Cas où J est un segment et où f est continue sur $I \times J$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Théorème de dérivation	
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$, telle que : i. pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ; ii. pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ; iii. pour tout $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J ; iv. il existe une fonction φ positive et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$ $$\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$$ (hypothèse de domination). Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$, $$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme. Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire. Cas où J est un segment et où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \times J$. ⇆ SI : exemples de transformées de Laplace.

Courbes et surfaces dans l'espace

On présente deux modes de représentation d'une surface de $\mathbb{R}^3$: paramétrage et équation cartésienne. Le passage de l'un à l'autre peut être étudié sur des exemples, mais le cas général est hors programme. La visualisation des surfaces grâce à un outil informatique et l'étude de sections planes permettent de développer la compétence « Représenter ». Les exemples peuvent être choisis parmi les quadriques, mais la définition et la classification de celles-ci sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Courbes et surfaces de $\mathbb{R}^3$ paramétrées	
Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$: $t \mapsto M(t)$. Surface paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(u,v) \mapsto M(u,v)$. Point régulier d'une courbe paramétrée, d'une surface paramétrée. Tangente en un point régulier d'une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$. Courbes coordonnées d'une surface paramétrée. Courbes tracées sur une surface paramétrée. Sections planes.	⇆ I : tracé de courbes paramétrées.
Plan tangent, droite normale en un point régulier d'une surface paramétrée. Base du plan tangent.	Le plan tangent en un point régulier est la réunion des tangentes aux courbes régulières tracées sur la surface passant par ce point.
Cas particulier des surfaces définies par une équation $z = g(x,y)$ avec g de classe $\mathscr{C}^1$.	Si g est de classe $\mathscr{C}^2$, position de la surface par rapport au plan tangent en un point critique de g.
b) Surfaces définies par une équation cartésienne	
Surface définie par une équation $f(x,y,z) = 0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Équation du plan tangent en un point régulier. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.	On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Exemples de surfaces	
Surface réglée. Génératrices.	Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point.
Surface de révolution. Axe, méridiennes, parallèles.	Exemples de génération de surfaces, de recherche de paramétrages et d'équations cartésiennes (surfaces de révolution, surfaces réglées). La forme générale de l'équation d'une surface de révolution est hors programme.