

## Problème

### Partie A

1.

①  $\forall p \in I = [30; 119]$ ,  $E(p) = p \cdot \frac{f'(p)}{f(p)}$ , avec  $f(p) = 2400 - 20p$ ,  
 dérivable sur  $I$ .  
 $f(p)$  est bien strictement positive sur  $I$ , car  
 $\forall p \leq 119$ ,  $-20p \geq -2380 \Leftrightarrow f(p) \geq 20 > 0$ .  
 donc  $E(p) = p \cdot \frac{f'(p)}{f(p)} = -p \times \frac{20}{2400 - 20p} = \frac{-p}{120 - p} = \frac{p}{p - 120}$ .

2.

②  $E(p) < -1$   
 $\Leftrightarrow \frac{p}{p - 120} < -1$   
 $\Leftrightarrow p > 120 - p$  car  $p \leq 119 \Rightarrow p - 120 \leq -1 < 0$ .  
 $\Leftrightarrow 2p > 120$   
 $\Leftrightarrow p > 60$   
 donc pour les prix compris entre 61 et 119, la demande  
 est élastique.

3.

③  $E(p) = -1 \Rightarrow p = 60$  (d'après la question 2).  
 on a alors,  $R(p) = p \cdot f(p) = 60 \cdot (21,00 - 20 \times 60)$   
 $= 72\,000$ .

4.

①  $\forall p \in I = [30; 119]$ ,  $R(p) = p \cdot f(p)$   
 $= p \times (21,00 - 20p)$ .

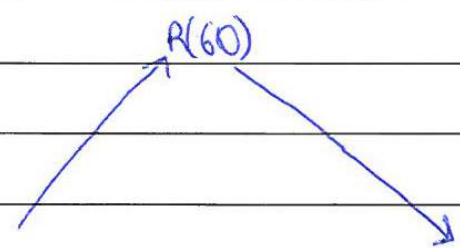
$R(p)$  est dérivable sur  $I$ , et  $\forall p \in I$ ,

$R'(p) = -40p + 21,00$

•  $R'(p) > 0 \Leftrightarrow -40p + 21,00 > 0$ ,  
 $\Leftrightarrow p < 60$

•  $R'(p) = 0 \Leftrightarrow -40p + 21,00 = 0$   
 $\Leftrightarrow p = 60$

Variations de  $(R(p))$

| p     | 30                                                                                  | 60 | 119 |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-----|
| R'(p) | +                                                                                   | 0  | -   |
| $V_R$ |  |    |     |

donc  $R$  admet un maximum pour  $p = 60$ , et on a donc  
 bien  $R_{\max} = R(60) = 72\,000$ .

## Partie B

1.a.

① a. sur  $[1; +\infty[$ ,  $g(x) = (2x+10)e^{-0,5x}$ .

$g$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  en tant que produit d'une fonction polynôme et exponentielle, toutes deux dérivables sur  $\mathbb{R}$  et donc en particulier sur  $[1; +\infty[$ .

$$\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) = 2e^{-0,5x} + (2x+10)x \cdot (-0,5)e^{-0,5x}$$

$$= (2 - x - 5)e^{-0,5x}$$

$$= (-x-3)e^{-0,5x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0. \text{ donc } e^{-0,5x} > 0, \forall x \in [1; +\infty[.$$

$$\text{et } x \geq 1 \Leftrightarrow -x \leq -1 \Leftrightarrow -x-3 \leq -4 < 0.$$

$$\text{donc } \forall x \in [1; +\infty[, g'(x) < 0.$$

donc  $g$  est strictement décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

1.b.

$$\text{Or } g(x) = (2x+10)e^{-0,5x}$$

$$= -4x - 0,5x e^{-0,5x} + 10e^{-0,5x}$$

TS

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -0,5x = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,5x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 10e^{-0,5x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\text{donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} -0,5x \cdot e^{-0,5x} = 0.$$

$$\text{Finalement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} g = 0.$$

Le résultat est cohérent car lorsque le prix devient très important ( $x \rightarrow +\infty$ ), la demande devient très faible, voire nulle ( $g(x) \rightarrow 0$ ).

1.c.

$$\begin{aligned} c- \quad R(x) &= x \cdot f(x) = x \cdot (2x+10)e^{-0,5x} \\ &= (2x^2+10x)e^{-0,5x} \end{aligned}$$

R dérivable sur  $[1; +\infty[$ , et  $\forall x \in [1; +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} R'(x) &= (4x+10)e^{-0,5x} + (2x^2+10x) \times (-0,5) \times e^{-0,5x} \\ &= (4x+10-x^2-5x)e^{-0,5x} \\ &= (-x^2-x+10)e^{-0,5x} \end{aligned}$$

$\forall x \in [1; +\infty[$ ,  $e^{-0,5x} > 0$ , donc R prend le signe de  $-x^2 - x + 10$ , polynôme de degré 2.

$$\Delta = 41 \quad x_1 = -\frac{1+\sqrt{41}}{2} ; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{41}}{2}$$

$$\text{donc, } R'(x)=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{41}}{2} > 1 \text{ ou } x = -\frac{1+\sqrt{41}}{2} < 0$$

$$\text{or } x \in [1; +\infty[$$

$$\text{donc } R'(x)=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{41}}{2}$$

et R admet un maximum pour cette valeur de x, puisque le coefficient de  $x^2$  est  $-1 < 0$ , donc R est strictement croissante sur  $\left[1; \frac{-1+\sqrt{41}}{2}\right[$  et strictement décroissante sur  $\left]\frac{-1+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right[$ .

$$\text{donc, pour que la recette soit maximale, } x = \frac{-1+\sqrt{41}}{2}$$

$$\approx 3, \text{ à } 1 \text{ près}$$

2.a.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ a. } \forall x \geq 1, E(x) &= x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= x \cdot \frac{(-x-3)e^{-0,5x}}{(2x+10)e^{-0,5x}} \\ &= \frac{-x^2 - 3x}{2x + 10} \end{aligned}$$

$$\forall x \geq 1, 2x + 10 \geq 12 > 0.$$

$$\text{et } -x-3 \leq -4 < 0.$$

$$\text{donc } x(-x-3) < 0, \text{ car } x > 0.$$

$$\text{donc } E(x) < 0.$$

2.b

Et lorsque le prix passe de 1000 € à 1010 €, il varie de 1 % ( $\frac{1}{100} \times 1000 = 10$ ).

donc le taux de variation de la demande est approximativement égal à l'élasticité.

On calcule donc ici  $E(x)$ , pour  $x = 1000$ .

$$E(1000) = \frac{-1000^2 - 3 \times 1000}{2 \times 1000 + 10} = \frac{-1003000}{2010} \approx -1,99,005 \times 10^{-3}.$$

2.c.

$$c. \quad E(x) = -3,15.$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 - 3x}{2x + 10} = -3,15.$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 3x + 6,3x + 31,5 = 0.$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3,3x + 31,5 = 0, \text{ polynôme de degré 2.}$$

$$\Delta = 136,89 = (11,7)^2.$$

$$x_1 = \frac{-3,3 + 11,7}{-2} = -4,2 < 0. \quad x_2 = \frac{-3,3 - 11,7}{-2} = 7,5 \geq -1$$

$$\text{Donc } E(x) = -3,15 \Leftrightarrow x = 7,5.$$

Si le prix est égal à 7,5€, alors l'élasticité de la demande sera égale à -3,15, la demande sera donc élastique.

2.d.

d. On cherche  $x \geq -1$ , tel que  $-1 \leq F(x) < 0$

Variations de  $E(x) \forall x \in [1; +\infty[$ :

$$E(x) = \frac{-x^2 - 3x}{2x + 10}$$

$$2x + 10$$

$$E'(x) = \frac{(-2x - 3)(2x + 10) - 2(-x^2 - 3x)}{(2x + 10)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 20x - 30}{(2x + 10)^2}$$

$$\forall x \geq 1, 2x + 10 > 0 \text{ donc } (2x + 10)^2 > 0.$$

donc  $E'(x)$  est du signe de  $-x^2 - 10x - 15$ .

$$\Delta = 100 = (2\sqrt{10})^2$$

$$x_1 = \frac{10 + 2\sqrt{10}}{-2} = -5 - \sqrt{10} < -1$$

$$x_2 = \frac{10 - 2\sqrt{10}}{-2} = -5 + \sqrt{10} < -1$$

donc,  $\forall x \geq -1$ ,  $E'(x)$  est du signe du coefficient de  $x^2$ ,  
c'est à dire négatif.

donc  $F(x)$  est strictement décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

$$\text{de plus, } F(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 3x}{2x + 10} = -1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x + 10 = 0, \Delta = 41$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2} < -1 \text{ or } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} > -1$$

donc  $E(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}$

~~et  $E(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x = 0$  et  $2x + 10 \neq 0$ .~~  
 ~~$\Leftrightarrow x = 0$  or  $-x - 3 = 0$  et  $x \neq -5$ .~~  
 ~~$\Leftrightarrow x = -3$ .~~

~~donc  $E(x) = 0$~~

de plus,  $\forall x \in [1; +\infty[, E(x) < 0$ .

donc,  $\forall x \leq \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}$ ,  $E(x) \geq -1$ , car  $E(x)$  (strictement) décroissante.

donc  $\forall x \leq \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}$ ,  $-1 \leq E(x) < 0$ .

donc la demande est peu élastique pour les prix compris entre 1 et  $\frac{-1 + \sqrt{41}}{2} \approx 2,70$  à  $10^{-2}$ .

## Partie C

1.a. et 1.b.

①  $f: x \mapsto x^n, x \in ]0; +\infty[, n \geq 1.$

$f$  ne s'annule pas sur  $]0; +\infty[$ , car  $x \neq 0$  et  $n \neq 0$ .

$$E_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{n \cdot x^{n-1}}{x^n} = n.$$

donc l'élasticité de cette fonction est constante sur  $]0; +\infty[$

2.  $f: x \mapsto e^x, \forall x \in ]0; +\infty[$

$f$  ne s'annule pas sur  $]0; +\infty[$ , car  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ .

$$E_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{e^x}{e^x} = x.$$

2.a.

②  $\lambda \in \mathbb{R}^*, \forall x > 0.$

$$\begin{aligned} a. E_{\lambda \cdot f}(x) &= x \cdot \frac{(\lambda \cdot f)'(x)}{(\lambda \cdot f)(x)} = x \cdot \frac{\lambda \cdot f'(x)}{\lambda \cdot f(x)} \quad \text{selon les règles} \\ &= x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = E_f(x). \quad \text{de calcul sur les} \\ &\hspace{15em} \text{dérivées.} \end{aligned}$$

2.b.

$$\text{2. } E_{f \times g}(x) = x \cdot \frac{(f \times g)'(x)}{(f \times g)(x)} = x \cdot \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{f(x) \times g(x)}.$$

$$= x \cdot \frac{f'(x) \cdot g(x)}{f(x) \cdot g(x)} + x \cdot \frac{f(x) \cdot g'(x)}{f(x) \cdot g(x)} = E_f(x) + E_g(x).$$

2.c.

$$\begin{aligned}
 c - E_{\frac{f}{g}}(x) &= x \frac{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)}{\left(\frac{f}{g}\right)(x)} \\
 &= x \cdot \frac{\cancel{g(x)} \cdot f'(x) - f(x) \cdot \cancel{g'(x)}}{g(x) \cdot g^2(x)} \\
 &= x \cdot \frac{f'(x) \cdot \cancel{g(x)}}{g(x) \cdot \cancel{g(x)}} - x \cdot \frac{\cancel{g(x)} \cdot g'(x)}{\cancel{g(x)} \cdot g(x)} \\
 &= E_f(x) - E_g(x).
 \end{aligned}$$

3.

$$\textcircled{3} \quad h(x) = \frac{2017e^x}{x^2}, \text{ sur } ]0; +\infty[.$$

$h$  ne s'annule pas sur  $]0; +\infty[$ , car  $f: x \mapsto 2017e^x$   
 et  $g: x \mapsto x^2$  ne s'annulent pas sur  $]0; +\infty[$ .

$$\text{donc } E_h(x) = E_f(x) - E_g(x), \text{ avec } f(x) = 2017e^x$$

$$\begin{aligned}
 & \text{or } g(x) = x^2. \\
 &= x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} - x \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \\
 &= x \cdot \frac{2017e^x}{2017e^x} - x \cdot \frac{2x}{x^2}
 \end{aligned}$$

lemme  $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$  si  $a < 1$  et  $b < c$ .

$$\text{donc } E_h(x) = x - 2, \forall x \in ]0; +\infty[.$$

### Exercice Vrai ou Faux

1.

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{-10}{x^2+1} + 2$

On a bien  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

Et soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{-1}{x^2+1} + 2$

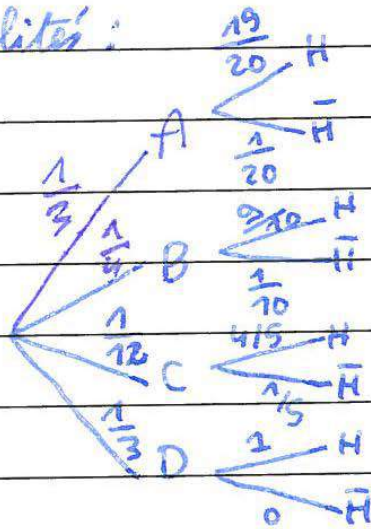
On a bien  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$

Pourtant,  $g(0) = \frac{-1}{0^2+1} + 2 = 1$  donc  $g(0) < 2$

(FAUX)

2.

2. On modélise cette situation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités :



$$\begin{aligned} p(D) &= 1 - p(A) - p(B) - p(C) \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On a noté  $H$  l'événement : "cette personne arrive à l'heure".

La probabilité que cette personne arrive à l'heure vaut :

$$\begin{aligned} p(H) &= p(A \cap H) + p(B \cap H) + p(C \cap H) + p(D \cap H) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{19}{20} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{12} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{113}{120} \end{aligned}$$

Et  $\frac{11}{12} = \frac{110}{120}$  donc  $p(H) > \frac{11}{12}$

(FAUX)

3.

| 3. | Valeur de $n$ | Valeur de $k$ | Valeur de $A$                                  |
|----|---------------|---------------|------------------------------------------------|
|    | 6             | 1             | $0 + \frac{1}{1} = 1$                          |
|    | 6             | 2             | $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$                |
|    | 6             | 3             | $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$     |
|    | 6             | 4             | $\frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$   |
|    | 6             | 5             | $\frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$ |
|    | 6             | 6             | $\frac{137}{60} + \frac{1}{6} = \frac{49}{20}$ |

Puis l'algorithme affecte à  $A$  la valeur  $nA$

$$\text{donc } A = 6 \times \frac{49}{20} \\ = 14,7$$

Le résultat affiché est bien 14,7.

VRAI

4.

4. On détermine les composantes des vecteurs  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$ .

$$\vec{AD} \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 1 - 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 - (-2) \\ -5 - 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{CD} \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{AD}, \vec{AB}) = 2 \times (-7) - (-1) \times 8 \\ = 0$$

donc les vecteurs  $\vec{AD}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires, de plus les points A, B et D sont alignés, donc  $D \in (AB)$ .

$$\vec{CD} \cdot \vec{AB} = 2 \times 8 + 3 \times (-7) \\ = 0$$

donc les vecteurs  $\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  sont orthogonaux  
donc les droites  $(CD)$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires.

Ainsi D est bien le point d'intersection de la droite  $(AB)$   
et de sa perpendiculaire passant par C.

(VRAI)

5.

$$5. \forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\text{donc } \sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \quad \text{car } \sin \frac{\pi}{8} > 0$$

$$= \sqrt{\frac{4 - 2 - \sqrt{2}}{4}} \quad \left( \text{sinon } -\sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \text{ aussi possible} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

(VRAI)

6.

6. Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , la proposition  $P_n: "u_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10"$  est vraie.

Initialisation:

pour  $n=1$ ,  $u_1 = 2$

et  $16\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4 \times 1 - 10 = 2$

donc  $P_1$  est vraie.

Hérédité:

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $P_n$  soit vraie.

ainsi,  $u_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$

$= \frac{1}{2}\left[16\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10\right] + 2n - 1$

$= 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2n - 5 + 2n - 1$

$= 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4n - 6 \quad (or -6 = -10 + 4)$

$= 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4(n+1) - 10$

donc  $P_{n+1}$  est vraie.

Cette proposition est initialement vraie et héréditaire. Du théorème de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n$  est vraie.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

VERA

7.

7. Un tir est une épreuve de Bernoulli de succès : "l'archer atteint la cible" de paramètre  $p = \frac{2}{5}$ .

On répète cette épreuve  $n$  fois de manière identique et aléatoire. On associe la variable aléatoire  $X$  au nombre de succès.  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = \frac{2}{5}$  ( $n \geq 1$ ).

La probabilité qu'il atteigne au moins une fois sa cible vaut :  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$$= 1 - \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0}$$

$$= 1 - 1 \times 1 \times (1-p)^n$$

$$= 1 - (1-p)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\forall n \geq 10, \frac{3}{5}^n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{10} \quad (\text{car } 0 < \frac{3}{5} < 1)$$

$$- \frac{3}{5} \geq - \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$$

$$p(X \geq 1) \geq 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$$

$$p(X \geq 1) \geq 0,994 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

donc pour  $n=10$ ,  $p(X \geq 1) < 0,999$

(FAUX)

8.

8. On considère l'équation  $(E_m): 2mx^2 + (4m+1)x + 2 = 0$   
avec  $m > 0$ .

Ainsi, le discriminant vaut  $\Delta = (4m+1)^2 - 4 \times 2m \times 2$   
 $= 16m^2 + 8m + 1 - 16m$   
 $= 16m^2 - 8m + 1$  ✓

On résout à présent l'équation  $(E_m'): 16m^2 - 8m + 1 > 0$

$$\Delta' = (-8)^2 - 4 \times 16 \times 1$$

$$= 0$$

donc  $16m^2 - 8m + 1$  est toujours du signe  
de 16 > 0 donc positif, mais  $16m^2 - 8m + 1 = 0$  pour  
 $m = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \times 16} = 0,25$  ✓

donc si  $m = 0,25$ , alors  $\Delta = 0$

donc  $(E_m)$  n'a qu'une seule solution.

(FAUX)

9. La fonction logarithme népérien et la fonction inverse sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc la fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$\begin{aligned}\text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} + \ln(x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \quad \checkmark\end{aligned}$$

L'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de  $f$  en un point d'abscisse  $a$  est de la forme:

$$\begin{aligned}T_a: y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= \frac{1 - \ln(a)}{a^2}(x-a) + \frac{\ln(a)}{a} \\ &= \frac{1 - \ln(a)}{a^2}x + \frac{\ln(a)(a-1) - 1}{a^2}\end{aligned}$$

$$T_a \text{ passe par l'origine } (\Rightarrow) \frac{\ln(a)(a-1) - 1}{a^2} = 0$$

$$(\Rightarrow) \ln(a)(a-1) - 1 = 0 \quad (a > 0 \text{ donc } a^2 > 0)$$

On étudie la fonction  $g$  définie  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$  par  $g(a) = \ln(a)(a-1) - 1$ .  
 $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\begin{aligned}g(1) &= \ln(1)(1-1) - 1 \\ &= -1 \quad \text{et } g(4) = \ln(4)(4-1) - 1 \\ &= 3\ln(4) - 1 \\ &> 3\end{aligned}$$

$$\text{on } 0 \in [-1; 3]$$

du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), l'équation  $g(a) = 0$  admet au moins une solution dans  $[1; 4]$  donc  $a$  existe dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

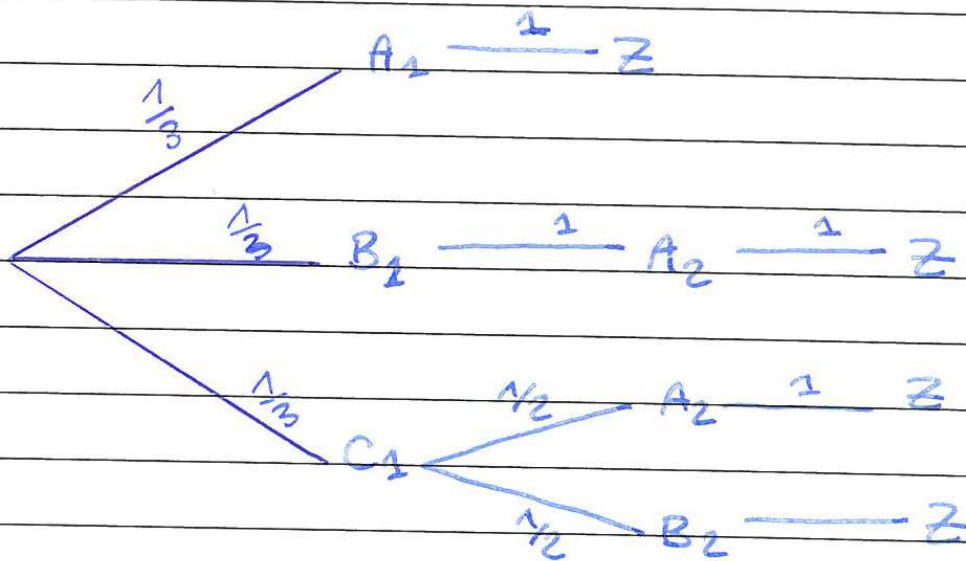
En conclusion  $\mathcal{C}_f$  admet au moins une tangente qui passe par l'origine. (VRAI)

10.

On note  $Z$  l'événement "il n'y a plus de boules dans l'urne".

On note  $A$  l'événement "la boule tirée le n° 1",  $B$  l'événement "la boule a le n° 2" et  $C$  ("la boule a le n° 3").

On peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.



$X$  suit la loi de probabilités suivante :

| $x_i$      | 1             | 2                                   | 3                                   |
|------------|---------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{3}$ | <del><math>\frac{1}{3}</math></del> | <del><math>\frac{2}{3}</math></del> |

car  $p(X=1) = p(A_1) = \frac{1}{3}$

car  $p(X=3) = p(B_1) + p(C_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Ainsi,  $E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times 0 + 3 \times \frac{2}{3}$   
 $= \frac{1}{3} + 2$

donc  $E(X) > 2$

(VRAI)