SciencesPo

Admission au Collège universitaire - Session 2016

Copie épreuve de Mathématiques
(Coefficient 2)

Problème

Partie A - 1/3

1) $I_1 = I_0 + 0{,}02\, I_0 + 500 = 5000 + 0{,}02 \times 5000 + 500$
$= 5600$

De la même façon, $I_2 = I_1 + 0{,}02\, I_1 + 500 = 5600 + 0{,}02 \times 5600 + 500$
$= 6212$

Enfin : $I_3 = I_2 + 0{,}02\, I_2 + 500$

$= 6212 + 0{,}02 \times 6212 + 500$
$= 6836{,}24.$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, le solde de l'année $n+1$ est égale à celui de l'année n multipliée par le taux d'intérêt, plus cette même solde, plus l'ajout de capital de 500 €.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 0{,}02\, I_n + I_n + 500$

$= 1{,}02\, I_n + 500.$

Partie A - 2/3

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad K_n = I_n + 25\,000$

Ainsi $\quad K_{n+1} = I_{n+1} + 25\,000$

$= 1{,}02\, I_n + 500 + 25\,000$

$= 1{,}02 \left(I_n + \frac{25\,500}{1{,}02} \right)$

$= 1{,}02 (I_n + 25\,000)$

$= 1{,}02\, K_n.$

On a ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad K_{n+1} = 1{,}02\, K_n.$

(K_n) est donc géométrique de raison $1{,}02$ et de premier terme $K_0 = I_0 + 25\,000 = 30\,000.$

4) (K_n) est une suite géométrique, ainsi

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad K_n = K_0 \times (1{,}02)^n = 30\,000 \times (1{,}02)^n$

On $\forall n \in \mathbb{N}, \quad K_n = I_n + 25000$

Ainsi, $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 30\,000 \times (1{,}02)^n = I_n + 25\,000$

$\iff \quad I_n = 30000 \times (1{,}02)^n - 25000$

Partie A - 3/3

5/ limite de (I_n) :

$\lim_{n \to +\infty} (1,02)^n = +\infty$ (terme général d'une suite géométrique dont la raison $q > 1$).

Par multiplication par un entier strictement positif :

$\lim_{n \to +\infty} 30\,000 \times 1,02^n = +\infty$.

Or $\lim_{n \to +\infty} (-25000) = -25000$

D'après le théorème sur la limite de la somme : $\lim_{n \to +\infty} (I_n) = +\infty$.

Algorithme pour que le solde soit supérieur à 20 000€.

Début :

I prend la valeur 5000
N prend la valeur 0
K prend la valeur 20 000

Tant que I < K , faire :

N prend la valeur n + 1

I prend la valeur 1,02 I + 500

Fin tant que :

Afficher N.

On trouve alors N = 21.

C'est donc en 2037 que le solde de l'assurance sera de plus de 20 000 €.

Partie B - 1/3

$\forall x \geq 1, \quad f(x) = \dfrac{30x - 16}{15x - 2}$

1) $f(1) = \dfrac{30 \times 1 - 16}{15 \times 1 - 2} = \dfrac{14}{13}$

limite en $+\infty$:

$\forall x \geq 1, \quad f(x) = \dfrac{30x - 16}{15x - 2} = \dfrac{x\left(30 - \frac{16}{x}\right)}{x\left(15 - \frac{2}{x}\right)}$

$= \dfrac{30 - \frac{16}{x}}{15 - \frac{2}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{16}{x}\right) = 0^-$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 30 = 30$
D'après le théorème sur la limite de la somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(30 - \dfrac{16}{x}\right) = 30$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{2}{x}\right) = 0^-$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 15 = 15$
D'après le théorème sur la limite de la somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(15 - \dfrac{2}{x}\right) = 15.$

$\Rightarrow$ D'après le théorème sur la limite du quotient :

$\lim\limits_{+\infty} f = \dfrac{30}{15} = 2$

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale $y=2$ au voisinage de $+\infty$.

Partie B - 2/3

2) f est dérivable pour tout $x \geq 1$ car elle y est continue et est le quotient de deux fonctions affines qui y sont dérivables où le dénominateur ne s'annule pas.

Donc $\forall x \geq 1$: $f'(x) = \dfrac{30(15x-2) - 15(30x-16)}{(15x-2)^2}$

$$= \frac{\cancel{30 \cdot 15x} - 60 - \cancel{15 \cdot 30x} + 240}{(15x-2)^2}$$

$$= \frac{180}{(15x-2)^2}$$

3) $f'(x) \geq 0 \iff \dfrac{180}{(15x-2)^2} \geq 0$.

Or $180 > 0$ et $(15x-2)^2 > 0$.

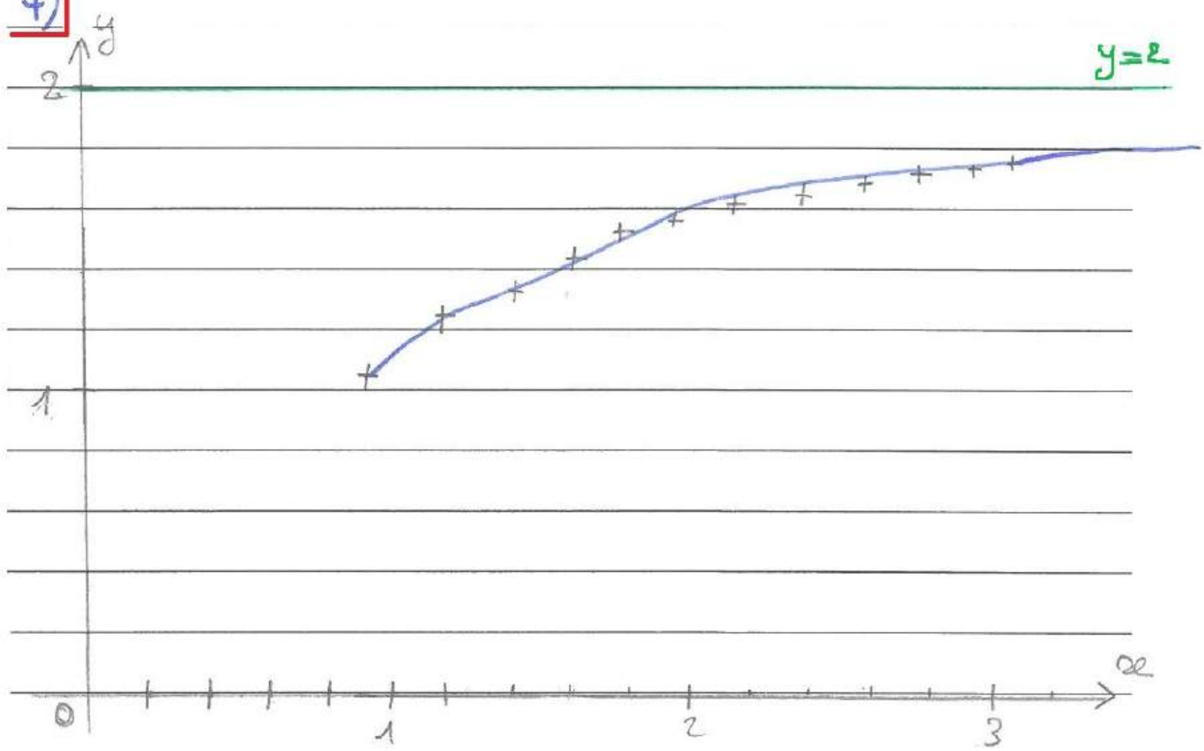
Donc $\forall x \geq 1$, $f'(x) > 0$.

Ainsi :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$\frac{14}{13}$	$\nearrow$	2

Partie B - 3/3

4)



Partie C - 1/6

1) Soit P_n la proposition posée pour n un entier naturel tel que : « $1 \leq u_n \leq 2$ ».

Initialisation: Soit $k = 0$.

$u_0 = 1$ Or $1 \leq 1 \leq 2$. Donc $1 \leq u_0 \leq 2$.

Donc P_0 vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons P_k vraie. $(1 \leq u_k \leq 2)$ Démontrons alors que P_{k+1} l'est aussi. $(1 \leq u_{k+1} \leq 2)$.

$1 \leq u_k \leq 2$ [HR].

$\Rightarrow f(1) \leq f(u_k) \leq f(2)$ car f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ contenant $u_k \geq 1$.

$\Rightarrow \frac{14}{13} \leq u_{k+1} \leq \frac{44}{28}$. Or $\frac{14}{13} \geq 1$ et $\frac{44}{28} \leq 2$.

Par transitivité de l'inégalité :

$$1 \leq \frac{14}{13} \leq u_{k+1} \leq \frac{44}{28} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq u_{k+1} \leq 2.$$

Donc si P_k est vraie, P_{k+1} l'est aussi.

Conclusion: D'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n \leq 2$.

Partie C - 2/6

2) a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1.$

$\Rightarrow 15 u_n \geq 15$

$\Rightarrow 15 u_n - 12 \geq 15 - 12$

$\Rightarrow 15 u_n - 12 \geq 3$

Or $3 > 0$, donc (v_n) est bien définie $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) b $v_0 = \dfrac{15 u_0 - 20}{15 u_0 - 12} = \dfrac{15 - 20}{15 - 12} = -\dfrac{5}{3}.$

$u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{14}{13}$

$v_1 = \dfrac{15 u_1 - 20}{15 u_1 - 12} = \dfrac{15 \times \frac{14}{13} - 20}{15 \times \frac{14}{13} - 12}$

$= \dfrac{-\frac{50}{13}}{\frac{54}{13}}$

$= -\dfrac{50}{13} \times \dfrac{13}{54}$

$= -\dfrac{25}{27}$

Partie C - 3/6

$$u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{14}{13}\right) = \frac{30\times\frac{14}{13}-16}{15\times\frac{14}{13}-2}$$

$$= \frac{\frac{212}{13}}{\frac{184}{13}}$$

$$= \frac{212}{13}\times\frac{13}{184}$$

$$= \frac{53}{46}$$

$$v_2 = \frac{15u_2-20}{15u_2-12} = \frac{15\frac{53}{46}-20}{15\frac{53}{46}-12}$$

$$= \frac{-\frac{125}{46}}{\frac{243}{46}}$$

$$= -\frac{125}{46}\times\frac{46}{243}$$

$$= -\frac{125}{243}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1} = \frac{15u_{n+1}-20}{15u_{n+1}-12}$$

$$= \frac{15f(u_n)-20}{15f(u_n)-12}$$

$$= \frac{15\left(\frac{30u_n-16}{15u_n-2}\right)-20}{15\left(\frac{30u_n-16}{15u_n-2}\right)-12}$$

$$= \frac{15(30u_n-16)-20(15u_n-2)}{15u_n-2}\times\frac{15u_n-2}{15(30u_n-16)-12(15u_n-2)}$$

$$= \frac{15(30u_n-16)-20(15u_n-2)}{15(30u_n-16)-12(15u_n-2)}$$

$$= \frac{450u_n-240-300u_n+40}{450u_n-240-180u_n+24}$$

Partie C - 4/6

$= \dfrac{150 u_n - 200}{270 u_n - 216}$

$= \dfrac{150}{270} \times u_n$

$= \dfrac{5}{9} \times u_n.$

Donc (v_n) est géométrique, de raison $\dfrac{5}{9}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{5}{3}$.

2)c (v_n) est une suite géométrique; donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$

$= -\dfrac{5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$

2)d $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{15 u_n - 20}{15 u_n - 12}$

$\Leftrightarrow v_n (15 u_n - 12) = 15 u_n - 20$

$\Leftrightarrow v_n . 15 u_n - 12 v_n = 15 u_n - 20$

$\Leftrightarrow 20 - 12 v_n = 15 u_n - 15 u_n . v_n$

$\Leftrightarrow 20 - 12 v_n = u_n (15 - 15 v_n)$

$\Leftrightarrow u_n = \dfrac{20 - 12 v_n}{15 - 15 v_n}$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\dfrac{5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n.$

Partie C - 5/6

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{20 - 12\left(-\frac{5}{3} \times \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)}{15 - 15\left(-\frac{5}{3} \times \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)}$

$$= \frac{20 + 20 \times \left(\frac{5}{9}\right)^n}{15 + 25 \times \left(\frac{5}{9}\right)^n}$$

$$= \frac{\dfrac{20 \times 9^n + 20 \times 5^n}{9^n}}{\dfrac{15 \times 9^n + 25 \times 5^n}{9^n}}$$

$$= \frac{20 \times 9^n + 20 \times 5^n}{9^n} \times \frac{9^n}{15 \times 9^n + 25 \times 5^n}$$

$$= \frac{20 \times 9^n + 20 \times 5^n}{15 \times 9^n + 25 \times 5^n}$$

$$= \frac{\cancel{5}(4 \times 9^n + 4 \times 5^n)}{\cancel{5}(3 \times 9^n + 5 \times 5^n)}$$

$$= \frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{3 \times 5^n + 3 \times 9^n}$$

Partie C - 6/6

2/e) Le taux du produit financier pour l'année 2016 + n est défini par T tel que

$T_{n+1} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$

Algorithme : Début :

U prend la valeur 1

N prend la valeur 0

V prend la valeur $\frac{14}{13}$

Tant que $\frac{U}{V} > 0,02$, faire :

N prend la valeur N+1

U prend la valeur $\frac{4 \times 5^N + 4 \times 9^N}{5 \times 5^N + 3 \times 9^N}$

V prend la valeur $\frac{30U - 16}{13U - 2}$

Fin tant que.

FIN. Afficher N.

Exercice Vrai-Faux

1/ L'expérience aléatoire est le gain algébrique G, qui suit la loi de probabilité :

g_i	-2	1	3
$p(G=g_i)$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

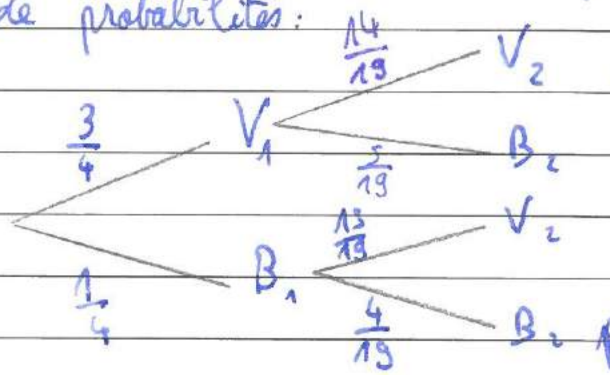
Donc $E(G)=\sum_{i=0}^{2} g_i \times p(G=g_i)$

$= -2\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}$

$= -1+1=0$.

Vrai

2/ L'expérience peut être modélisée par un arbre pondéré de probabilités :



$p(V_1\cap V_2)=\frac{3}{4}\times\frac{14}{19}=\frac{21}{38}$

$p(B_1\cap B_2)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{19}=\frac{1}{19}$

V l'événement « on tire des chaussettes vertes »
B " « " bleues »

$\{V;B\}$ forment une partition de l'univers Ω tel que $\Omega=20$.

$p(V_1)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ $p(B_1)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Soit A l'événement « obtenir 2 chaussettes d'une même couleur »

$p(A)=p(V_1\cap V_2)+p(B_1\cap B_2)=\frac{21}{38}+\frac{1}{19}=\frac{23}{38}$

$\simeq 0,605$ à 10^{-3} près.

Vrai

Exercice Vrai-Faux

3) Soit C l'évènement « l'assiette est cassée ».

On est dans un schéma de Bernoulli où l'on exécute 100 répétitions et la probabilité p que l'assiette soit cassée est $\frac{4}{100}$.

La probabilité qu'au moins 99 assiettes ne soient pas cassées est égale à : $p(C \leq 1)$.
avec C le nombre d'assiettes cassées.
$k \in [0; 100]$, et suit la loi de probabilité :

$$p(C=k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{4}{100}\right)^k \times \left(1 - \frac{4}{100}\right)^{n-k}$$

$$= \binom{100}{k} \times \left(\frac{4}{100}\right) \times \left(\frac{96}{100}\right)^{n-k}$$

$$p(C \leq 1) = \left[p(C=0) + p(C=1)\right]$$

$$p(C=0) = \binom{100}{0} \times \left(\frac{4}{100}\right)^0 \times \left(1 - \frac{4}{100}\right)^{100-0}$$

$$= \left(\frac{96}{100}\right)^{100}$$

$$p(C=1) = \binom{100}{1} \times \left(\frac{4}{100}\right)^1 \times \left(\frac{96}{100}\right)^{100-1}$$

$$= 4 \times \left(\frac{96}{100}\right)^{99}$$

On a alors : $p(C \leq 1) = \left(\frac{96}{100}\right)^{100} + 4 \times \left(\frac{96}{100}\right)^{99} \approx 0,087$ à 10^{-3} $< 0,1$.

Faux.

Exercice Vrai-Faux

4) Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto e^x \end{array}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$, car f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit (D) la tangente en 0.

$(D) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\Leftrightarrow y = 1 \times x + 1$

$\Leftrightarrow y = x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant x+1$

$\Leftrightarrow e^x \geqslant x+1$

$\Leftrightarrow e^x - x \geqslant 1.$

Soit $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto e^x - x. \end{array}$

$g'(x) = e^x - 1.$ $\quad g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \geqslant 1.$

$\Leftrightarrow x \geqslant 0.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$\searrow$		1		$\nearrow$

$g(0) = e^0 - 0 = 1.$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant x+1.$

Donc $(\mathcal{C})$ est bien au-dessus de (D).

Vrai

Exercice Vrai-Faux

5) (d') d'équation $x - 2y + 3 = 0$
$$\Leftrightarrow 2y = x + 3$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

Or dans un repère orthonormé, deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Ici celui de (d') est $\frac{1}{2}$.

Si (d) est d'équation $y = \frac{x}{2}$, alors le sien est $\frac{1}{2}$. Donc (d) et (d') sont parallèles.

On vérifie que $A \in (d)$: $\frac{2}{2} = 1$. A vérifie l'équation de (d).

Donc la droite passant par A et parallèle à (d') est bien (d) d'équation $y = \frac{x}{2}$

Vrai

6) f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, car ln n'est définie que sur $\mathbb{R}^*_+$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)(\ln x)$ est impossible.

Faux

Exercice Vrai-Faux

7) On est dans un repère orthonormé, donc :

$AB = \sqrt{(1-6)^2+(3-4)^2} = \sqrt{26}$

$AC = \sqrt{(1-7)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{52}$

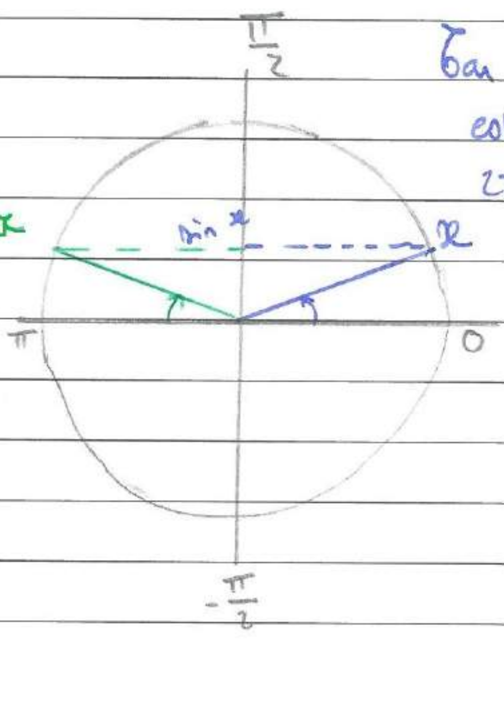
$BC = \sqrt{(6-7)^2+(4-(-1))^2} = \sqrt{26}$

$AB = BC$ donc ABC est isocèle en B.

De plus $AC^2 = \sqrt{52}^2 = 52$ et $AB^2+BC^2 = \sqrt{26}^2+\sqrt{26}^2 = 52$.
Donc $AC^2 = AB^2+BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Donc ABC est isocèle rectangle en B. Vrai

8) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.



Car la fonction sinus est impaire et de période 2π.

Vrai

Exercice Vrai-Faux

9) Faux. Le théorème sur la convergence monotone stipule qu'il faut que (u_n) soit croissante majorée ou décroissante minorée pour qu'elle converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$. u_n est croissante et minorée par $u_0 = 0$. Mais elle diverge vers $+\infty$. (contre-exemple).

10) Faux: La fonction f du problème est positive est croissante $\forall x \geq 1$. Cependant sa limite en $+\infty$ est 2.