ADMISSION AU COLLEGE UNIVERSITAIRE
Samedi 20 février 2016
MATHEMATIQUES
durée de l'épreuve : 3h – coefficient 2

Le sujet comporte 4 pages, y compris celle-ci. Veuillez vérifier que vous avez bien toutes les pages.

En cas d'anomalie, avertissez le surveillant.

Le problème est noté sur 12, l'exercice Vrai-Faux est noté sur 8. Vous devez traiter les deux exercices.

Les calculatrices sont autorisées.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur typographique, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Problème

La partie A est indépendante des parties B et C.

Partie A

Une banque propose un contrat d'assurance vie qui fonctionne de la façon suivante. A l'ouverture du contrat en janvier 2016, le client dépose 5000 euros. Le 31 décembre de chaque année, la banque ajoute des intérêts à hauteur de 2%. Puis chaque année, le 1er janvier, le client dépose 500 euros. Les intérêts produits une année engendrent eux-mêmes des intérêts les années suivantes.

On note I_n le solde de l'assurance vie au 1er janvier de l'année $(2016+n)$. Ainsi $\mathrm{I}_0 = 5000$.

1. Calculer $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ et I_3.
2. Montrer que pour tout entier n, $\mathrm{I}_{n+1} = 1,02\ \mathrm{I}_n + 500$.
3. On note (K_n) la suite définie pour tout n par $\mathrm{K}_n = \mathrm{I}_n + 25000$. Montrer que la suite (K_n) est géométrique.
4. En déduire l'expression de K_n puis celle de I_n en fonction de n.
5. Justifier que la suite (I_n) tend vers $+\infty$. Ecrire un algorithme permettant de déterminer l'année au bout de laquelle le solde de l'assurance serait supérieur à 20000 euros. Déterminer cette année.

Partie B

Soit f la fonction définie pour $x \geqslant 1$ par

$$f(x) = \frac{30x-16}{15x-2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Calculer $f(1)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe représentative de f ?
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$,
$$f'(x) = \frac{180}{(15x-2)^2}$$
3. Dresser le tableau de variation de f pour $x \geqslant 1$.
4. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.

Partie C

Un cadre de la banque envisage la commercialisation d'un produit financier dont la valeur, en centaine d'euros à la fin de l'année $(2016+n)$, serait modélisée par la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

2. On introduit la suite (v_n) définie pour tout n par

$$v_n = \frac{15u_n - 20}{15u_n - 12}$$

   (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie.

   (b) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $-\frac{5}{3}$ et de raison $\frac{5}{9}$.

   (c) Exprimer v_n en fonction de n.

   (d) Après avoir donné l'expression de u_n en fonction de v_n, démontrer que

$$u_n = \frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}$$

   (e) Etablir un algorithme permettant de déterminer la première année pour laquelle le taux de variation de ce produit financier sera inférieur à 2%.
   Déterminer cette année.

Exercice : Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. On dispose d'un dé à quatre faces bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Un joueur qui lance le dé gagne 3 euros s'il tombe sur 4, 1 euro s'il tombe sur 1 et perd 2 euros sinon. On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur.
   Proposition : l'espérance de G est nulle.

2. Une urne contient 15 chaussettes vertes et 5 chaussettes bleues. Une personne tire successivement et sans remise deux chaussettes.
   Proposition : la probabilité qu'il obtienne deux chaussettes de la même couleur, arrondie à 10^{-3}, est égale à $0,605$.

3. Une usine fabrique des assiettes en grande quantité. On admet que 4% des assiettes fabriquées sont cassées. On prélève au hasard 100 assiettes, et on considère que le stock d'assiettes disponibles est très important.
   Proposition : la probabilité qu'au moins 99 assiettes ne soient pas cassées est supérieure à $0,1$.

4. Soient (C) la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère et (D) la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.
   Proposition : la courbe (C) est au-dessus de la droite (D).

5. Dans un repère orthonormé, on note (d) la droite, passant par $\mathrm{A}(2;1)$ et parallèle à la droite (d') d'équation $x-2y+3=0$.
   Proposition : (d) a pour équation $y=\frac{x}{2}$.

6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-1)\ln(x)$.
   Proposition : dans un repère orthonormé, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est horizontale.

7. Dans un repère orthonormé, on désigne par A, B et C les points de coordonnées $\mathrm{A}(1;3), \mathrm{B}(6;4)$ et $\mathrm{C}(7;-1)$.
   Proposition : le triangle ABC est rectangle isocèle.

8. **Proposition** : Pour tout réel x, $\sin(\pi-x)=\sin(x)$.

9. Soit (u_n) une suite croissante minorée.
   Proposition : la suite (u_n) converge.

10. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive et croissante.
    Proposition : La limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

***** **FIN** *****