SciencesPo

Admission au Collège universitaire - Session 2015

Copie épreuve de Mathématiques
(Coefficient 2)

Exercice Vrai-Faux

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = n\, v_n$ et $v_1 = 1$

d'où $v_2 = 1 \times v_1 = 1 \times 1 = 1$

et $v_3 = 2 \times v_2 = 2 \times 1 = 2$; $2 \neq 3$

donc c'est FAUX

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$ et $u_0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{u_n}$ d'où $v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + 1}$

d'où $v_{n+1} = e^{u_n} \times e = v_n \times e$ et $v_0 = e^1 = e$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison e et de premier terme $v_0 = e$.

Donc par définition, la somme des termes de la suite (v_n), notée S_n, est égale, $\forall n \in \mathbb{N}$, à

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e} = \frac{e(1 - e^{n+1})}{1 - e}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n+1} = +\infty$ par propriété.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{n+1} = -\infty$ par somme de limites.

$\lim\limits_{n \to +\infty} e(1 - e^{n+1}) = -\infty$ car $e > 0$, par produit de limites.

de plus, $e > 1 \Leftrightarrow 1 - e < 0$

donc par quotient de limites, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

donc c'est FAUX

3. Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Alors, sa dérivée f' est strictement positive sur $[0;+\infty[$.
de plus, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = e^{-f(x)}$
la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
d'où $g'(x) = -f'(x) \times e^{-f(x)}$
or $f'(x) > 0 \iff -f'(x) < 0$ de plus, $X \mapsto e^X > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $e^{-f(x)} > 0$.
donc par signe d'un produit, $g'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
donc c'est <u>VRAI</u>

4. Le prix des biens immobiliers augmente chaque année de 5% se traduit par la suite géométrique de premier terme $u_{2000} = x$ et de raison $q = (1 + \frac{5}{100})$
d'où le terme général $u_n = u_{2000} \times (1,05)^{n-2000}$ $\forall n \in [2000;+\infty[$ n naturel
or on connaît $u_{2020} = 1\,500\,000$
d'où $u_{2000} \times (1,05)^{20} = 1\,500\,000 \iff u_{2000} = \frac{1\,500\,000}{(1,05)^{20}}$

$\iff u_{2000} \simeq 565334$ à l'unité près

or $565334 \neq 53722$ donc c'est <u>FAUX</u>

5. $(E) \iff 3e^{2x} + 2 = 12e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$
$(E) \iff 3e^{2x} - 12e^x + 2 = 0$
On pose $X = e^x$
alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(E) \iff 3X^2 - 12X + 2 = 0$
$a = 3$ $b = -12$ $c = 2$ dans ce trinôme du second degré
$\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 4 \times 6 = 120$
$\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles
$X_1 = \frac{12 - \sqrt{120}}{6}$ $X_2 = \frac{12 + \sqrt{120}}{6} > 0$

Or $120 < 144 \iff \sqrt{120} < \sqrt{144}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$\iff \sqrt{120} < 12$

$\iff 12 - \sqrt{120} > 0$

donc $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$.

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

donc X_1 et X_2 sont deux solutions de l'équation $3X^2 - 12X + 2 = 0$. En remplaçant, on a

$e^{x_1} = \dfrac{12 - \sqrt{120}}{6} \iff x_1 = \ln\left(\dfrac{6 - \sqrt{30}}{3}\right)$

$e^{x_2} = \dfrac{6 + \sqrt{30}}{3} \iff x_2 = \ln\left(\dfrac{6 + \sqrt{30}}{3}\right)$

donc c'est <u>VRAI</u>

6. (d) a pour équation $3x + 4y + 4 = 0$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$

donc le vecteur directeur $\vec{d}$ de (d) a pour coordonnées dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$ $\vec{d}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ car $\vec{d}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ $b = 4$, $a = 3$

On cherche à déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AH}$. $\vec{AH}\begin{pmatrix} \frac{8}{5} - 4 \\ -\frac{11}{5} - 1 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{AH}\begin{pmatrix} -\frac{12}{5} \\ -\frac{16}{5} \end{pmatrix}$

On vérifie que (d) passe par H : $3x_H + 4y_H + 4 = A$

$A = \dfrac{3 \times 8}{5} - 4 \times \dfrac{11}{5} + \dfrac{20}{5} = \dfrac{24 + 20 - 44}{5} = 0$

donc (d) passe par H. Enfin, on vérifie que (AH) est perpendiculaire à (d).

$x_{\vec{d}}\, x_{\vec{AH}} + y_{\vec{d}}\, y_{\vec{AH}} = -4 \times \left(-\frac{12}{5}\right) + 3 \times \left(-\frac{16}{5}\right)$

$= \dfrac{48}{5} - \dfrac{48}{5} = 0$

donc $\vec{AH}$ et $\vec{d}$ sont normaux donc (AH) et (d) sont perpendiculaires. Donc (AH) est la droite Δ.

donc c'est <u>VRAI</u>.

7. L'algorithme permet de déterminer à partir de quelle valeur de I, $S > P$.
Au début, $S_0 = 1$. et ici, $I = 10$.
donc $S_1 = S \times I = 10$
et $I_1 = I_0 - 1 = 9$
$S_2 = S_1 \times I_1 = 90$ etc...
donc On a une suite $I_{n+1} = I_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
et une suite $S_{n+1} = S_n \times I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
$S_4 = S_0 \times I_0 \times I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$
$S_4 = 1 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$
$S_4 = 30240 > 1000$
et $S_3 = \frac{30240}{6} = 5040 < 10000$.

Donc pour $P = 10000$ et $N = 10$, l'algorithme retourne 6
donc c'est VRAI.

8. La définition de l'équation d'une Tangente,
$y_{T(1)} = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

$f \in \mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = e^x(x^2+x+1) + (2x+1)e^x$
d'où $y_{T(1)} = (\quad 6e \quad) \times x - 6e + 3e$
$y_{T(1)} = 6e \times x - 3e \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.
On cherche la solution de l'équation $y_{T(1)} = 0 \iff (E)$
$(E) \iff 3e(2x-1) = 0$ car $3e \neq 0$
$(E) \iff 2x - 1 = 0$ $e > 0$
$(E) \iff 2x = 1$
$(E) \iff x = \frac{1}{2}$
donc la Tangente à f en 1 coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $x = 0,5$.
donc c'est VRAI.

9. Les gélules sont mises aléatoirement dans des sachets de 10. Elles sont en très grande quantité donc on peut considérer qu'il s'agit d'un tirage aléatoire avec remise. L'épreuve "mettre une ~~boîte~~ gélule dans un sachet" a pour succès "la gélule a une masse non conforme". On note X la variable aléatoire qui exprime le nombre de succès. Le succès a pour probabilité $p = 0{,}03$ donc on est face à un cas de loi binomiale de paramètres $(10; 0{,}03)$.

Par définition

$$P(X \leq 1) = \binom{10}{1} \times (0{,}03)^1 \times (0{,}97)^9 + \binom{10}{0} \times (0{,}97)^{10}$$

$P(X \leq 1) \approx 0{,}965$ à 10^{-3} près. $0{,}965 > 0{,}96$ donc au moins 96 % des sachets auront 9 ou 10 gélules conformes. C'est VRAI

10. Tombola de Raphaël:

Gain X	249*	49	1	−1
P(X)	1/100	1/25	1/4	7/10

*car on paye 1€ pour jouer

Par définition de l'espérance, $E(X)_R = \frac{249}{100} + \frac{49}{25} + \frac{1}{4} - \frac{7}{10}$

$E(X)_R = 4$

Loterie d'Aurélien

Gain X	19	14	9	4	−1
P(X)	1/20	1/10	3/20	1/4	45/100

De même, $E(X)_A = \frac{19}{20} + \frac{14}{10} + \frac{27}{20} + 1 - \frac{45}{100}$

$E(X)_A = 4{,}25$

Or $4{,}25 > 4$ donc il est préférable de participer à la tombola d'Aurélien

c'est donc FAUX.

Problème

Partie A

1. Cette augmentation constante de 19% par an se traduit par une suite géométrique de raison $q = 1,19$ et de premier terme $u_{2006} = 500$

Son terme général est donc, pour n un naturel et $n \in [2006 ; +\infty[$, $u_n = u_{2006} \times (1,19)^{n-2006}$

$u_n = 500 \times 1,19^{n-2006}$

On veut résoudre l'inéquation $\forall n \in [2006 ; +\infty[$

$u_n \geqslant 5000 \iff 500 \times 1,19^{n-2006} \geqslant 5000$

$\iff 1,19^{n-2006} \geqslant 10$ 　 or $n \geqslant 2006$, $1,19 > 1$, $10 > 0$ et $\ln x \geqslant 0$ quand $x \geqslant 1$.

d'où $u_n \geqslant 5000 \iff \ln(1,19^{n-2006}) \geqslant \ln 10$

$\iff (n-2006)\ln(1,19) \geqslant \ln 10$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 10}{\ln(1,19)} + 2006$

$\iff n \geqslant 2019,2368$ arrondi à 10^{-4}

d'où, n étant un entier,

$n = 2020$.

donc l'année d'on dépassera 5000\$ au cours de l'année 2019, et donc sera supérieur à 5000\$ en janvier 2020.

2.a Le prix de vente étant proportionnel à la masse d'or contenue, et que tous les articles sont vendus, la courbe exprimant les recettes de l'entreprise est une droite. Donc C_2 représente les coûts et C_1 les recettes.

2b. On conjecture que les deux fonctions sont strictement croissantes par lecture graphique.

3.a. Graphiquement, le bénéfice est nul quand le produit contient une masse d'or qui est l'abscisse du point d'intersection des deux courbes. Ainsi, on a l'équation $C(x) - R(x) = 0 \iff (E)$. R et C dépendent de la masse d'or et α est une solution de (E). Cette équation revient à $C(\alpha) - \alpha = 0$ par lecture graphique

3b. Les bénéfices sont positifs quand $C < R$. donc par lecture graphique, $m \in [10 ; 19]$. Donc les produits doivent contenir entre 10 et 19 grammes d'or pour que les bénéfices de l'entreprise soient positifs.

Partie B

1. $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $\varphi(x) = e^{x-1} - \frac{1}{2} - x$

$\varphi(x) = x \cdot \left(\frac{e^{x-1}}{x} - 1 \right) - \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. On pose $X = x - 1$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{X}}{X+1} = +\infty$ cc.

d'où par addition de limites et produit de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

2. $\forall x \in [1 ; +\infty[$, φ est définie et dérivable et $\varphi'(x) = e^{x-1} - 1$

$x \geq 1 \iff x - 1 \geq 0$

$\iff e^{x-1} \geq 1$

car $x \mapsto e^x \geq 0$

donc $e^{x-1} - 1 \geq 0$

donc $\varphi'(x) \geq 0$ $\forall x \in [1 ; +\infty[$

donc φ est croissante sur $[1 ; +\infty[$

3. $\varphi(\cancel{x})$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ donc continue sur ce même intervalle. De plus, φ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

$\varphi(1) = -\frac{1}{2} < 0$ $\varphi(2) = e - 2,5$ or $e \simeq 2,718 > 2,5$

donc $\varphi(2) > 0$

donc $\varphi(1) < 0 < \varphi(2)$ et sur $[2;+\infty[$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution notée α.

$\varphi(x) = 0 \iff C(x) - x = 0 \iff C(x) = x$

donc l'équation $C(x) = x$ admet une seule solution sur $[1;+\infty[$ notée α. CQFD

4. $C(\frac{3}{2}) = e^{1/2} - \frac{1}{2}$

$= \sqrt{e} - \frac{1}{2} \approx 1,15$ à 10^{-2} près

$\frac{3}{2} = 1,5$

donc $C(\frac{3}{2}) < \frac{3}{2}$

$C(2) = e - \frac{1}{2}$

$e > 2,5 \iff e - \frac{1}{2} > 2$ donc $C(2) > 2$

donc, φ étant strictement monotone, $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

Partie C

1. $\forall x \in I$, $C(x) = x \iff e^{x-1} - \frac{1}{2} = x$

$\iff e^{x-1} = x + \frac{1}{2}$

$e^{x-1} > 0$ et $x > \frac{3}{2} \iff x + \frac{1}{2} > 0$

d'où $C(x) = x \iff \ln(e^{x-1}) = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$\iff x - 1 = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$\iff x = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1$

$\iff x = g(x)$ CQFD.

2.a) g est définie et dérivable sur I

$g'(x) = \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{2x+1}$ or $x > \frac{3}{2}$ donc $2x+1 > 0$

donc $g'(x) > 0$ $\forall x \in I$.

donc $\forall x \in I$, g est ~~croi~~ strictement croissante sur I.

or $g\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 2 + 1$

$g\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1{,}69$ à 10^{-2} près $1{,}69 > \frac{3}{2}$

$g(2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) + 1 = \ln(5) - \ln(2) + 1$

$g(2) \approx 1{,}92$ à 10^{-2} près. $1{,}92 < 2$

d'où $\frac{3}{2} < g\left(\frac{3}{2}\right) < g(2) < 2$

de plus, g est strictement croissante sur I.

donc $\forall x \in I$, $g(x) \in I$. CQFD

2b. $\forall x \in I$, $g'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$

or $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2 \iff 3 \leqslant 2x \leqslant 4$

$\iff 4 \leqslant 2x+1 \leqslant 5$

$\iff \dfrac{2}{5} \leqslant \dfrac{2}{2x+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$

car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante et $2 > 0$.

or $0 < \frac{2}{5}$

d'où $0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$ CQFD

3. a. On a $\forall (x;y) \in I$, $|g(x)-g(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

Or on sait aussi d'après C.1, que $g(x)=x \Leftrightarrow C(x)=x$
De plus, d'après la question B3, $C(x)=x$ admet une unique solution α.
d'où $C(\alpha)=\alpha \Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$.

donc on a $|g(x)-g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}(x-\alpha) \Leftrightarrow (1)$

$(1) \Leftrightarrow |g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}(x-\alpha)$ CQFD

3b $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1}=g(w_n)$ et $w_0=\frac{3}{2}$
d'où $w_1=g\left(\frac{3}{2}\right)$ or si $x \in I$, $g(x) \in I$ donc
$w_1 \approx 1,693$ à 10^{-3} près
les ~~tiers~~ valeurs de $g(w_n)$ sont bien des élément de I.

$w_2=g(w_1) \approx 1,785$ à 10^{-3} près

$w_3=g(w_2) \approx 1,827$ à 10^{-3} près.

3c. Soit (P_n) la propriété $\forall n \in \mathbb{N}$, " $|w_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ "

Initialisation : pour $n=0$, $w_0=\frac{3}{2}$ or $\alpha \in \left[\frac{3}{2};2\right]$

donc $|w_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}$ or $\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}=\frac{1}{2}$

donc $|w_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$ Donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Hérédité : On suppose que (P_n) est vraie pour un entier naturel n quelconque et fixé. On veut montrer qu'alors (P_{n+1}) est vraie.

(P_{n+1}) : " $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}}$, $|w_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

On $w_{n+1} = g(w_n)$

d'où $|w_{n+1} - \alpha| = |g(w_n) - \alpha|$

Or, par la question 3.a, on sait que $|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$

d'où $|g(w_n) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|w_n - \alpha|$

Or par hypothèse de récurrence,

$|w_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ donc $\frac{1}{2}|w_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ car $\frac{1}{2} > 0$

d'où $|g(w_n) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|w_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

d'où $|w_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

Donc si (P_n) est vraie, (P_{n+1}) est aussi vraie.

Conclusion : la propriété étant initialisée et par axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

CQFD

d. $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_{n+1} = g(w_n)$. On la fonction g est croissante sur I et $x \in I \iff g(x) \in I$.

de plus, $w_0 \in I$ donc (w_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}$. De plus, $w_n \in I \iff \frac{3}{2} \leqslant w_n \leqslant 2$

donc (w_n) est croissante et majorée par 2.

Donc d'après le théorème de convergence monotone, (w_n) converge vers une limite finie l.

de plus, $|w_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$|X| \geqslant 0$ d'où $0 \leqslant |w_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\frac{1}{2} < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

donc par théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n \to +\infty} |w_n - \alpha| = 0$. De plus, $w_n > 0$ et $\alpha > 0$.

$|w_n - \alpha|$ correspond à la distance entre w_n et α.
de plus, α est un nombre fixé.

donc $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \alpha}$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |w_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

or $w_n > 0$, $\alpha > 0$, (w_n) est croissante sur $\mathbb{N}$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n \leqslant \alpha$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \alpha$

donc $|w_n - \alpha| = \alpha - w_n$

d'où $0 \leqslant \alpha - w_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \Leftrightarrow (2)$

$(2) \Leftrightarrow \quad w_n \leqslant \alpha \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + w_n$ cohérent

Pour obtenir un encadrement à 10^{-4} près de α, il faut que $w_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - w_n \leqslant 10^{-4} \quad \Leftrightarrow (3)$

$(3) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant 10^{-4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{10^4}$ car $10^4 > 0$ et $2^{n+1} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow 2^{n+1} \geqslant 10^4$

$\Leftrightarrow \ln 2^{n+1} \geqslant \ln 10^4$ car $x \mapsto \ln x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (n+1)\ln 2 \geqslant 4 \ln 10$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{4 \ln 10}{\ln 2} - 1 \Leftrightarrow n \geqslant 12{,}29$

$\Leftrightarrow n \geqslant 13$

d'où $w_{13} \leqslant \alpha \leqslant w_{13} + \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$ est un encadrement à 10^{-4} près de α

qui donne $1,8576707 \leqslant \alpha \leqslant 1,8577317$
d'après la calculatrice.

5. Soit α la masse d'or pour laquelle l'entreprise réalise un bénéfice nul.
$1,8576707 \leqslant \alpha \leqslant 1,8577317$
d'où $\alpha \simeq 1,86$ à 10^{-2} près.

donc la masse α est $1,86$ dizaines de grammes
donc elle est de ~~18,6~~ grammes environ.

mauvais arrondi