Stage de Pré-rentrée

Maths Sup

Fiches méthodes

25/08 – 29/08 2014

Physique

COURS THALÈS - HORIZON PRÉPA • Établissement privé d'enseignement supérieur
10 cité Joly 75011 PARIS • 01 42 05 41 36 • contact@cours-thales.fr

Fiche méthode *Sciences physiques*

Dérivées en physique

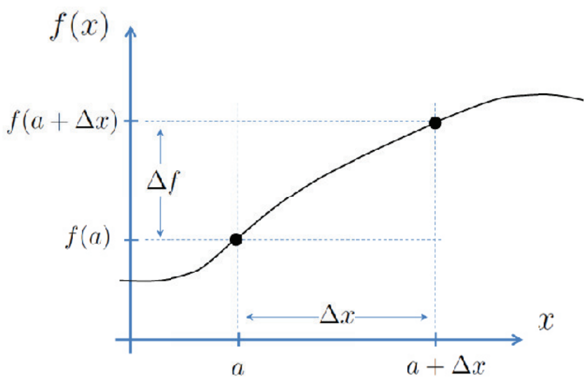
On ne traite ici que le cas des fonctions à une seule variable.

I Dérivée première

Rappel : qu'est-ce qu'une dérivée en mathématique ?

La dérivée d'une fonction $x \to f(x)$ prise en $x = a$ correspond à la limite du taux de variation de f au voisinage de $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{(a+\Delta x) - a} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right]$$



Ⓡ *$f'(a)$ est la **pente de la tangente** à la courbe de f en $x = a$.*

Notation de la dérivée première

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x=a} = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a}}$$

le "d" représentant une différence *infinitésimale* :
– pour "dx" : différence entre deux valeurs de x infiniment proches au voisinage de a,
– pour "df" : différence entre entre les deux valeurs de f correspondantes

Pour désigner plus généralement la fonction f' :

$$\boxed{f' = \frac{df}{dx}}$$

Ⓡ *L'intérêt de cette notation est de garder à l'esprit qu'une dérivée est un **taux de variation "limite"**.*

Conséquence : variation infinitésimale de f On pourra écrire : $\boxed{df = f'(x)\,dx}$ ce qui signifie qu'**à une variation infiniment petite (ou infinitésimale) dx de la variable x correspond une variation infinitésimale $df = f'(x)\,dx$ de la fonction f.**

Ⓡ $\dfrac{d.}{dx}$ *correspond à l'opérateur "dérivée par rapport à x"*

II Dérivée seconde

Notation de la dérivée seconde

La dérivée seconde d'une fonction correspond à deux dérivations successives, donc on applique deux fois l'opérateur dérivée $\dfrac{d.}{dx}$:

$$f''(a) = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right]_{x=a}$$

que l'on notera plus simplement : $\boxed{f''(a) = \left(\dfrac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=a}}$

Ou encore, pour désigner plus généralement la fonction f'' : $\boxed{f'' = \dfrac{d^2f}{dx^2}}$

III Généralisation

Dans le programme de physique de classe préparatoire, on aura rarement l'occasion d'aller au delà de la dérivée seconde. Mais néanmoins, on peut généraliser de la manière suivante :

Notation de la dérivée nième

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_{x=a}} \qquad \boxed{f^{(n)} = \frac{d^nf}{dx^n}}$$

Autre notation

Si y est une **fonction de la variable temporelle** t, on pourra noter ses dérivées successives : $\dot{y},\ \ddot{y},\ \dots$

IV Dérivée de vecteur

Pour exprimer la variation d'un vecteur par rapport au temps par exemple (ou tout autre variable), on pourra utiliser la même définition que précédemment.

Différence cruciale et fondamentale avec la dérivée d'une fonction scalaire :

<u>**Il faut préciser par rapport à quel référentiel on évalue la dérivée d'un vecteur ! !**</u>

Exemple : imaginons une flèche disposée sur un manège et symbolisant un vecteur $\overrightarrow{V}$ (donc de norme constante ici). Alors, du point de vue d'un observateur fixe sur le manège :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_{manege}} = 0$$

car de son point de vue, la flèche ne change ni de norme, ni de direction, ni de sens. C'est donc un vecteur constant.

Mais pour un observateur fixe sur le sol à côté du manège :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_{sol}} \neq 0$$

car de son point de vue, même si la norme est constante, le vecteur change en permanence de direction, donc c'est un vecteur non-constant.

Fiche méthode *Sciences physiques*

Notion d'intégrale en physique

Dans cette fiche, nous expliquons comment un physicien "voit" l'intégrale.
Pour cela, partons d'un exemple simple.

1. Position du problème

On considère une voiture avançant en ligne droite avec une accélération constante de norme a_0. À l'instant initial $t = t_0$, elle possède une vitesse nulle. v évolue donc linéairement avec le temps : $v(t) = a_0(t - t_0)$.

On se demande quelle est la distance D parcourue au bout d'une durée τ.

Si la voiture avançait à vitesse constante v_0, la réponse serait simple : $D = v_0\tau$. Mais justement, **la vitesse n'est pas constante** ici, on ne peut donc pas utiliser cette relation.

2. Discrétisation

On découpe le parcours en N petit parcours de durée $\Delta t = \dfrac{\tau}{N}$ chacun.
On définit alors les instants : $t_k = t_0 + k\Delta t$, où k est un entier compris entre 1 et N.

Pour estimer D approximativement, on considère qu'entre t_{k-1} et t_k , la vitesse reste constante et vaut $v(t_{k-1})$.

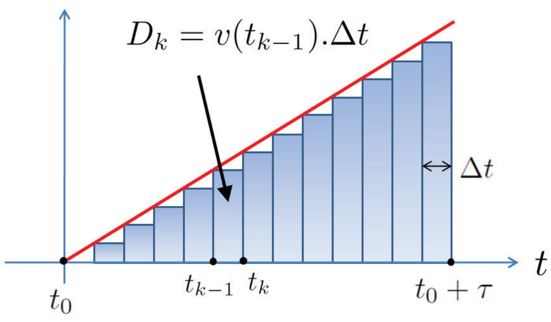
Alors, la durée D_k parcourue sur cet intervalle de temps est : $D_k = v(t_{k-1}).\Delta t$

Par cette méthode, on en déduit approximativement la distance totale :

$$D \simeq D_1 + D_2 + ... + D_n = \sum_{k=1}^{N} D_k = \sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t$$

Interprétation géométrique

$v(t) = a_0(t - t_0)$



Effectuer la somme :

$$D \simeq \sum_{k=1}^{N} D_k = \sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t$$

revient donc à calculer la **somme des aires** de chaque rectangle bleu sous la courbe de $v(t)$.

3. Passage à la limite

Le résultat sera d'autant moins approximatif que la segmentation est fine. Il faut donc **passer à la limite** $N \to \infty$ et donc $\Delta t \to 0$:

$$\sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D$$

On admet également que :

$$\sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\mathrm{d}t$$