Stage de Pré-rentrée

Maths Sup

Fiches méthodes

25/08 – 29/08 2014

Physique

Fiche méthode *Sciences physiques*

Dérivées en physique

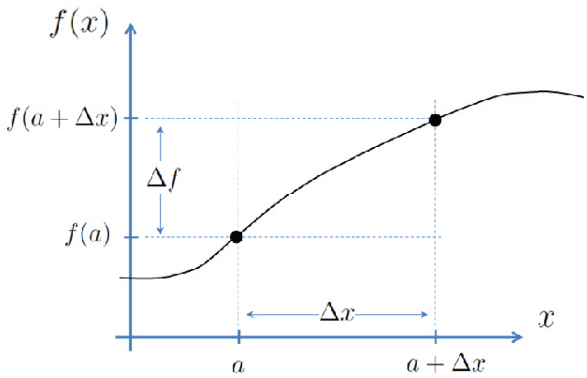
On ne traite ici que le cas des fonctions à une seule variable.

I Dérivée première

Rappel : qu'est-ce qu'une dérivée en mathématique ?

La dérivée d'une fonction $x \to f(x)$ prise en $x = a$ correspond à la limite du taux de variation de f au voisinage de $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{(a+\Delta x) - a}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}\right]$$



R *$f'(a)$ est la **pente de la tangente** à la courbe de f en $x = a$.*

Notation de la dérivée première

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x=a} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}}$$

le "d" représentant une différence *infinitésimale* :
- pour "dx" : différence entre deux valeurs de x infiniment proches au voisinage de a,
- pour "df" : différence entre entre les deux valeurs de f correspondantes

Pour désigner plus généralement la fonction f' :

$$\boxed{f' = \frac{df}{dx}}$$

R *L'intérêt de cette notation est de garder à l'esprit qu'une dérivée est un **taux de variation "limite"**.*

Conséquence : variation infinitésimale de f On pourra écrire : $\boxed{df = f'(x)\,dx}$ ce qui signifie qu'**à une variation infiniment petite (ou infinitésimale) dx de la variable x correspond une variation infinitésimale $df = f'(x)\,dx$ de la fonction f.**

R *$\dfrac{d.}{dx}$ correspond à l'opérateur "dérivée par rapport à x"*

II Dérivée seconde

Notation de la dérivée seconde

La dérivée seconde d'une fonction correspond à deux dérivations successives, donc on applique deux fois l'opérateur dérivée $\frac{d.}{dx}$:

$$f''(a) = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right]_{x=a}$$

que l'on notera plus simplement : $\boxed{f''(a) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=a}}$

Ou encore, pour désigner plus généralement la fonction f'' : $\boxed{f'' = \frac{d^2f}{dx^2}}$

III Généralisation

Dans le programme de physique de classe préparatoire, on aura rarement l'occasion d'aller au delà de la dérivée seconde. Mais néanmoins, on peut généraliser de la manière suivante :

Notation de la dérivée nième

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_{x=a}} \qquad \boxed{f^{(n)} = \frac{d^nf}{dx^n}}$$

Autre notation

Si y est une **fonction de la variable temporelle** t, on pourra noter ses dérivées successives : $\dot{y},\ \ddot{y},\ \ldots$

IV Dérivée de vecteur

Pour exprimer la variation d'un vecteur par rapport au temps par exemple (ou tout autre variable), on pourra utiliser la même définition que précédemment.

Différence cruciale et fondamentale avec la dérivée d'une fonction scalaire :

<u>Il faut préciser par rapport à quel référentiel on évalue la dérivée d'un vecteur ! !</u>

Exemple : imaginons une flèche disposée sur un manège et symbolisant un vecteur $\overrightarrow{V}$ (donc de norme constante ici). Alors, du point de vue d'un observateur fixe sur le manège :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_{manege}} = 0$$

car de son point de vue, la flèche ne change ni de norme, ni de direction, ni de sens. C'est donc un vecteur constant.
Mais pour un observateur fixe sur le sol à côté du manège :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_{sol}} \neq 0$$

car de son point de vue, même si la norme est constante, le vecteur change en permanence de direction, donc c'est un vecteur non-constant.

Fiche méthode *Sciences physiques*

Notion d'intégrale en physique

Dans cette fiche, nous expliquons comment un physicien "voit" l'intégrale.
Pour cela, partons d'un exemple simple.

1. Position du problème

On considère une voiture avançant en ligne droite avec une accélération constante de norme a_0. À l'instant initial $t = t_0$, elle possède une vitesse nulle. v évolue donc linéairement avec le temps : $v(t) = a_0(t - t_0)$.

On se demande quelle est la distance D parcourue au bout d'une durée τ.

Si la voiture avançait à vitesse constante v_0, la réponse serait simple : $D = v_0\tau$. Mais justement, **la vitesse n'est pas constante** ici, on ne peut donc pas utiliser cette relation.

2. Discrétisation

On découpe le parcours en N petit parcours de durée $\Delta t = \dfrac{\tau}{N}$ chacun.
On définit alors les instants : $t_k = t_0 + k\Delta t$, où k est un entier compris entre 1 et N.

Pour estimer D approximativement, on considère qu'entre t_{k-1} et t_k , la vitesse reste constante et vaut $v(t_{k-1})$.

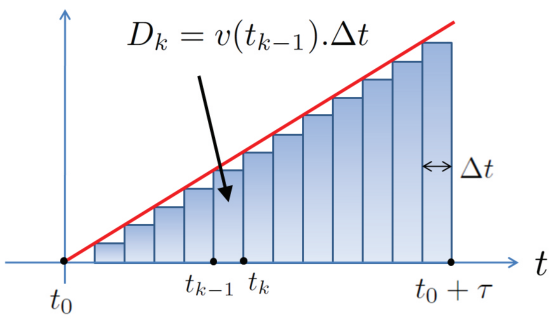
Alors, la durée D_k parcourue sur cet intervalle de temps est : $D_k = v(t_{k-1}).\Delta t$

Par cette méthode, on en déduit approximativement la distance totale :

$$D \simeq D_1 + D_2 + ... + D_n = \sum_{k=1}^{N} D_k = \sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t$$

Interprétation géométrique

$v(t) = a_0(t - t_0)$



Effectuer la somme :

$$D \simeq \sum_{k=1}^{N} D_k = \sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t$$

revient donc à calculer la **somme des aires** de chaque rectangle bleu sous la courbe de $v(t)$.

3. Passage à la limite

Le résultat sera d'autant moins approximatif que la segmentation est fine. Il faut donc **passer à la limite** $N \to \infty$ et donc $\Delta t \to 0$:

$$\sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D$$

On admet également que :

$$\sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\mathrm{d}t$$

Ce sera démontré en cours de mathématique de deuxième semestre.

Donc, par unicité de la limite : $D = \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\mathrm{d}t$

En passant à la limite, on dit que l'on passe d'une somme discrète de contributions D_k à une **somme continue et infinie de *contributions élémentaires*** $\delta D = v(t)\mathrm{d}t$, où $\mathrm{d}t$ représente une variation infinitésimale du temps :

$$\boxed{D = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \delta D = \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\mathrm{d}t}$$

Interprétation géométrique

En passant à la limite $\Delta t \to 0$ et $N \to \infty$, D tend à devenir *exactement* l'aire sous la courbe de $v(t)$ entre t_0 et $t_0 + \tau$.

R *Dans l'exemple précédent, il n'y a plus qu'à terminer le calcul intégral, sachant* $v(t) = a_0(t - t_0)$ *:*

$$D = \int_{t_0}^{t_0+\tau} a_0(t - t_0)\mathrm{d}t = \left[\frac{a_0}{2}t^2 - a_0 t\right]_{t_0}^{t_0+\tau} = ...$$

Méthode : calcul intégral

Pour les questions du type "*calculer la **quantité** G entre les valeurs x_1 et x_2 de la variable du problème*" :

Méthode	***Exemple***
1. Exprimer la **contribution élémentaire** δG que l'on peut associer à G en fonction de la variation infinitésimale de la variable du problème, $\mathrm{d}x$: $\delta G = f(x)\mathrm{d}x$	On cherche la quantité totale de charge Q qui peut être débitée par une batterie dont l'intensité varie suivant : $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, τ et I_0 étant constants La quantité élémentaire de charge δQ débitée entre t et $t + \mathrm{d}t$ vaut par définition : $\delta Q = i(t)\mathrm{d}t$
2. Exprimer G comme la somme continue des contributions élémentaires δG : $G = \int_{x_1}^{x_2} \delta G = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$	Ici, les deux bornes d'intégrations sont l'instant initial $t = 0$ (où la pile commence à débiter) et $t \to \infty$ (la pile arrête de débiter, càd intensité nulle, lorsque $t \to \infty$). D'où : $Q = \int_0^\infty \delta Q = \int_0^\infty i(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty I_0 e^{-t/\tau}\mathrm{d}t$
3. Faire le calcul de l'intégrale	$Q = \left[-I_0\tau e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = I_0\tau$

Fiche méthode *Sciences physiques*

Résoudre une équation différentielle du premier ordre

I Équations différentielles du 1er ordre sans second membre

Forme de l'équation et solution générale

• En physique, on rencontre souvent ce type d'équation qui se met sous la forme : $\boxed{f' + \lambda f = 0}$ où f est une fonction de la variable t, et λ est une constante.

En notation différentielle, elle s'écrit : $\dfrac{df}{dt} + \lambda f = 0$

• La **solution** est du type $\boxed{f(t) = Ke^{-\lambda t}}$ où K est une constante que l'on détermine à l'aide des ***conditions initiales*** données.

R *Pour vérifier que l'on n'a pas fait d'erreur de signe, dans l'argument de l'exponentielle notamment, on peut tester rapidement la solution en vérifiant que $f' + \lambda f$ vaut bien 0 .*

– **Qu'est-ce que λ ?** $\Longrightarrow$ constante reliée aux paramètres physiques intervenant dans la situation physique étudiée.
(exemple du circuit RC : on définit $\lambda = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{RC}$)

– **Comment déterminer la constante K ?** $\Longrightarrow$ elle semble arbitraire, mais en pratique sa valeur est imposée car initialement (càd, à $t = 0$) l'expérimentateur applique une contrainte f_0 au système physique : $f_0 = f(t = 0)$. On utilise cette égalité pour déterminer la valeur de K.

Si la variable est le temps t, on parle alors de ***condition(s) initiale(s)***.
Si la variable est une variable spatiale, on parlera plutôt de condition aux limites ...

Méthode : Comment retrouver rapidement la solution générale ?

$$f' + \lambda f = 0 \quad \Rightarrow \quad f' = -\lambda f \quad \Rightarrow \quad \frac{f'}{f} = -\lambda$$

Donc les primitives de $\dfrac{f'}{f}$ sont égales à celles de $-\lambda$ **à une constante près** ⚠

Une primitive connue de $\dfrac{f'}{f}$ est $\ln f$.
Pour la fonction constante égale à $-\lambda$, on peut choisir la primitive $-\lambda x$.
Donc :

$$\ln f(x) = -\lambda x + C$$

où C est une constante.

Pour remonter à l'expression de f, il suffit d'appliquer la fonction réciproque du logarithme, càd, la fonction exponentielle :

$$f(x) = e^{-\lambda x + C} = e^{-\lambda x} \times e^{C}$$

Comme C est une constante, on peut définir la constante $K = e^{C}$, de sorte que : $f(x) = Ke^{-\lambda x}$

II Équations différentielles du 1er ordre avec second membre

Forme de l'équation et solution générale

• Se met sous la forme :

$$\boxed{f' + \lambda f = g}$$

où g est une fonction *connue*.

• La **solution** est du type $\boxed{f(t) = Ke^{-\lambda t} + \text{solution particulière}}$ où K est une constante que l'on détermine à l'aide des conditions initiales données.

Il faut donc connaître une fonction qui soit solution *particulière* de l'équation (n'importe laquelle conviendra).

R *On dit que "la solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme d'**une** solution particulière et de **la** solution générale de l'équation homogène associée (càd, équation sans second membre correspondante)".*

R ***Si la fonction** g **est constante**, **une solution particulière très simple** est :* $f_{part} = \dfrac{1}{\lambda} g$

On se trouvera majoritairement dans ce type de cas.

R *Si la fonction g n'est pas une constante, chercher une solution particulière qui a la même forme que g.*

En physique, en général, ce genre de situation se présentera uniquement lorsque g sera de type sinusoïdal : $g(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

Il faudra alors chercher une solution f_{part} également sous forme sinusoïdale : $f_{part}(t) = A' \sin(\omega t + \phi)$

Fiche méthode *Sciences physiques*

Projections de vecteurs

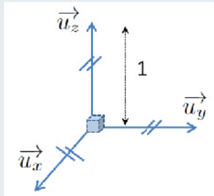
I Rappel : produit scalaire

Produit scalaire entre deux vecteurs

$$\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B} = ||\overrightarrow{A}|| \times ||\overrightarrow{B}|| \times \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$$

Application aux vecteurs d'une base orthonormée

$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{u_x}\,.\,\overrightarrow{u_x} & = & 1 \\ \overrightarrow{u_y}\,.\,\overrightarrow{u_y} & = & 1 \\ \overrightarrow{u_z}\,.\,\overrightarrow{u_z} & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \overrightarrow{u_x}\,.\,\overrightarrow{u_y} & = & 0 \\ \overrightarrow{u_x}\,.\,\overrightarrow{u_z} & = & 0 \\ \overrightarrow{u_y}\,.\,\overrightarrow{u_z} & = & 0 \end{array}$$



R *Les vecteurs d'une base orthonormée sont de norme 1 et orthogonaux entre eux.*

Bilinéarité du produit scalaire

Soient λ et μ deux réels. Alors :

$$\overrightarrow{A}\,.\,(\lambda\overrightarrow{B} + \mu\overrightarrow{C}) = \lambda\,\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B} + \mu\,\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{C}$$

II Projection d'un vecteur dans une base orthonormée

Projection d'un vecteur dans une base orthonormée

Dans une base **orthonormée** (⚠) notée $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, supposons que le vecteur $\overrightarrow{A}$ se décompose de la manière suivante dans cette base :

$$\overrightarrow{A} = a_x\,\overrightarrow{u_x} + a_y\,\overrightarrow{u_y} + a_z\,\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on obtient alors :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{u_x} & = & a_x \\ \overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{u_y} & = & a_y \\ \overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{u_z} & = & a_z \end{array} \right.}$$

Utilisation d'une base orthonormée pour exprimer un produit scalaire

De même, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

N.Gaudouen

Fiche méthode *Sciences physiques*

Bases de projection et coordonnées

I Choix de la base de projection

Une base de projection est un outil permettant de **projeter des équations vectorielles pour obtenir un ensemble d'équations scalaires plus faciles à manipuler.**
En physique, on choisira toujours des **bases orthonormées directes** car plus simple à utiliser.

Une fois que le référentiel a été choisi pour rendre l'étude du mouvement la plus simple possible, il faut **choisir une base de projection : notamment, celle dans laquelle les vecteurs vitesse et accélération s'exprimeront de la manière la plus simple possible.**

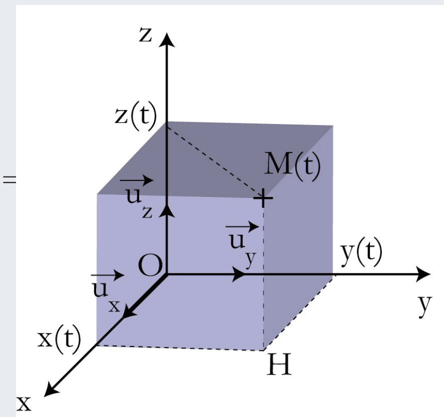
> **ATTENTION !!!**
>
> **Ne pas confondre "base de projection" et "référentiel"**
>
> Dans un référentiel d'étude donné, on peut choisir n'importe quelle base de projection.

II Une base fixe : les coordonnées cartésiennes

C'est la base la plus naturelle.

Elle est constituée d'un point **fixe** et de vecteurs unitaires **fixes** *dans le référentiel d'étude choisi*.

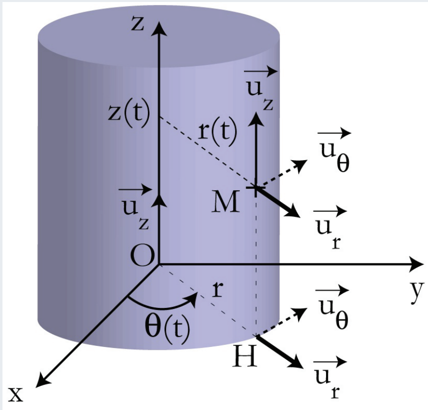
Base FIXE	$(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$
Coordonnées de $M(t)$	$(x(t), y(t), z(t))$
Vecteur position	$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Déplacement élémentaire	$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$
Vitesse	$\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$
Accélération	$\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$



III Une base mobile : les coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires)

Cette base mobile dépend directement de la position du point M étudié.

Base MOBILE	$(\overrightarrow{u_r}(M), \overrightarrow{u_\theta}(M), \overrightarrow{u_z})$
Coordonnées de $M(t)$	$(r(t), \theta(t), z(t))$
Vecteur position	$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$
Déplacement élémentaire	$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$
Vitesse	$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$
Accélération	$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$



R *Le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ est défini à posteriori de telle sorte à ce que $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ forme une base vectorielle* ***directe****.*

Cas d'un mouvement circulaire uniforme

autour de l'axe (Oz) de rayon R constant de vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \Omega$:

$$\overrightarrow{v} = R\Omega\overrightarrow{u_\theta} \quad , \quad \overrightarrow{a} = -R\Omega^2\,\overrightarrow{u_r} = \frac{-v^2}{R}\,\overrightarrow{u_r}$$

Formules importantes à connaître et à savoir retrouver

$\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta} = \overrightarrow{u_\theta} \qquad \dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$	$\dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{u_r} \qquad \dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$

⚠ Ici, les dérivées s'effectuent par rapport à une base cartésienne **fixe** $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$

R ***Coordonnées polaires***
Lorsque le mouvement est plan, s'effectuant à z ***constant****, on parlera plutôt de* ***base polaire*** $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ *et de* ***coordonnées polaires*** (r, θ) *. (Par exemple, pour un mouvement circulaire...)*

cours Thalès

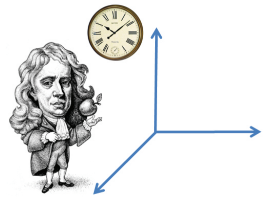
Fiche méthode *Sciences physiques*

Notions de base de cinématique

I Relativité du mouvement - Notion de référentiel

La nature d'un mouvement dépend toujours de la situation de celui qui l'observe !
Il faudra donc toujours préciser le référentiel dans lequel est étudié le mouvement.

Définition
On appelle **référentiel**, un système d'axes lié à un observateur, ce dernier étant muni d'une horloge. On peut ainsi repérer et suivre l'évolution de la position du point matériel dans l'espace au cours du temps.



R *Par définition, l'observateur est immobile dans ce référentiel.*

Choix du référentiel d'étude

Pour étudier le mouvement d'un mobile, le référentiel d'étude doit être choisi de manière à ce que le mouvement puisse être décrit de la manière la plus simple possible.

Par exemple, pour le mouvement des planètes, on se placera dans le référentiel héliocentrique. Pour le mouvement des satellites terrestres, on se placera dans le référentiel géocentrique. Pour étudier la chute d'une pomme, on se placera dans le référentiel terrestre. Etc.

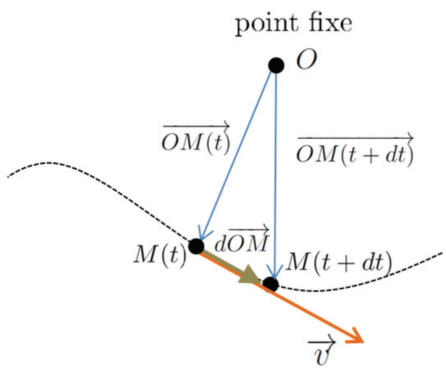
II Description du mouvement dans un référentiel donné

II.1 Vecteur position et vecteur déplacement élémentaire

Le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}(t))$ permet de donner la position de M au cours du temps par rapport au point O, considéré fixe dans le référentiel d'étude.

Entre deux instants infiniment proches t et $t + dt$, le **vecteur déplacement élémentaire** donne le déplacement infinitésimal du point M entre ces deux instants :

$$\text{vecteur déplacement élémentaire} = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}$$



On remarque que **si O est un point fixe du référentiel considéré** :
$\overrightarrow{M(t)M(t+dt)} = \overrightarrow{OM(t+dt)} - \overrightarrow{OM(t)} =$ *variation infinitésimale du vecteur* $\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}(t)$

Donc, $\overrightarrow{M(t)M(t+dt)} = d\overrightarrow{OM}(t)$

R *Le point fixe choisi n'est pas nécessairement l'origine du repère dans lequel on travaille, mais ce sera généralement le cas ...*

II.2 Vecteur vitesse

Par définition, le vecteur vitesse du point matériel évalué à l'instant t **dans le référentiel** $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}}(t) = \left(\frac{\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

Si O est un point fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

Si il n'y a pas d'ambiguïté concernant le référentiel utilisé, on pourra alléger la notation :

$$\vec{v}(t) = \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

Propriétés

- On peut écrire : $\overrightarrow{M(t)M(t+dt)} = d\overrightarrow{OM} = \vec{v}\,dt$
- $\vec{v}(t)$ est toujours tangent à la trajectoire au point $M(t)$
- $\vec{v}$ est indépendant du point fixe choisi.

En prenant deux points fixe O et O', on montre aisément : $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$

II.3 Vecteur accélération

Par définition, le vecteur accélération du point matériel évalué à l'instant t **dans le référentiel** $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{a}_{/\mathcal{R}}(t) = \left(\frac{d\vec{v}_{/\mathcal{R}}(t)}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

Si O est un point fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

Si il n'y a pas d'ambiguïté concernant le référentiel utilisé, on pourra alléger la notation :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}$$

On montre aisément (comme pour $\vec{v}$) que $\vec{a}$ est indépendant du point fixe choisi.

II.4 Quelques définitions

Trajectoire du mouvement : courbe reliant les positions successives de M.

L'**équation horaire** du mouvement donne le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ à chaque instant.

Il ne faut pas confondre *équation de la trajectoire* et *équation horaire* du mouvement.

Si on connait l'équation horaire du mouvement, on peut en déduire l'équation de la trajectoire, mais la réciproque est fausse.

Mouvement uniforme : $||\vec{v}|| = cte$

On n'a pas nécessairement : $\vec{v} = \overrightarrow{constant}$: pour un mouvement uniforme, la **norme** de $\vec{v}$ est constante mais **la direction de $\vec{v}$ peut varier** (exemple du mouvement circulaire uniforme)

Tension et courant électrique

I La tension électrique

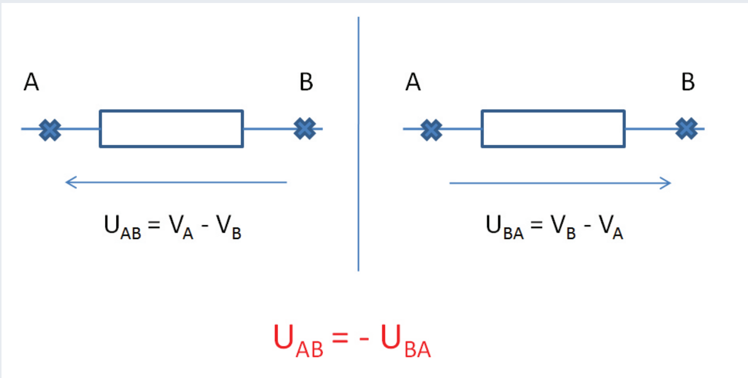
On appelle *tension*, ou différence de *potentiel*, la grandeur mesurée par un voltmètre entre deux points A et B. Elle s'exprime en volt (V).

On note les tensions avec la lettre U et les potentiels avec la lettre V.

La tension U_{AB} mesurée entre deux points A et B d'un conducteur est :

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

Sur un schéma, on symbolise la tension U_{AB} par une flèche allant de B vers A.



Physiquement, une tension électrique est représentative d'une **force qui tend à déplacer les porteurs de charges** (les électrons dans le cas des métaux, les ions dans le cas d'une solution, etc) dans un sens ou dans l'autre suivant le signe des charges.
Cette force est appliquée à l'aide d'un champ électrique provenant d'un **générateur**.

Orientation d'une tension

Pour étudier un dipôle AB, on peut tout aussi bien définir sa tension U par $U = U_{AB}$ ou $U = U_{BA}$, **c'est un choix arbitraire qui ne changera en rien les résultats physiques**.

R *Il faudra être vigilant et penser à adapter l'utilisation des relations courant-tensions suivant les choix effectués. Se reporter notamment à la fiche "Convention récepteur et générateur".*

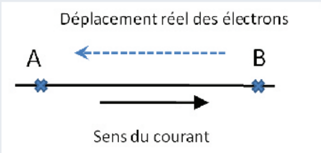
Par exemple, la loi d'Ohm en convention récepteur est $U = Ri$. Mais si on choisit de l'étudier en inversant le sens de la tension, donc en convention générateur, alors il faudra écrire : $-U = Ri$

II Le courant électrique

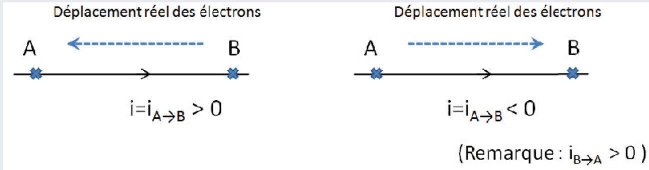
L'effet d'une tension étant de déplacer les porteurs de charges, il en résulte un mouvement global de ces porteurs qu'on appelle courant électrique.

Sens du courant

Par définition, le sens du courant est le sens dans lequel se déplaceraient des charges positives ce qui équivaut au sens inverse du déplacement des charges négatives.



Sens *conventionnel* du courant i



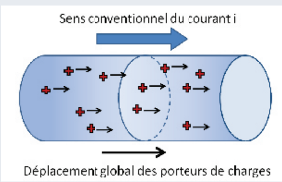
R *__Le sens conventionnel du courant est un <u>choix arbitraire</u>__ au même titre que l'orientation des axes d'un repère pour positionner un point dans l'espace.*
Ci-dessus, on a choisi de l'orienter de A vers B ($i = i_{A\to B}$) mais on aurait pu faire le choix inverse.

R *__Le sens conventionnel du courant est <u>algébrique</u> :__ on n'a donc pas besoin d'indiquer constamment le sens réel du courant dès lors que celui-ci nous est indiqué par le signe mathématique du sens conventionnel.*

Intensité du courant

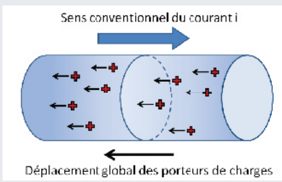
Si pendant un intervalle de temps dt, la section du conducteur est traversée ***<u>suivant</u> le sens conventionnel du courant*** par une quantité ***algébrique*** de charges δq, alors l'intensité du courant électrique vaut :

$$\boxed{i = \frac{\delta q}{dt}}$$



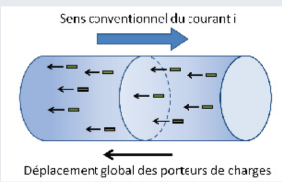
porteurs de **charges positives** se déplaçant dans le sens conventionnel du courant
Donc : $\delta q > 0$

Donc : $\boxed{i = \frac{\delta q}{dt} > 0}$



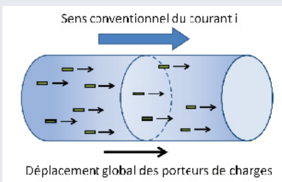
porteurs de **charges positives** se déplaçant dans le sens contraire au sens conventionnel du courant
Donc : $\delta q < 0$

Donc : $\boxed{i = \frac{\delta q}{dt} < 0}$



porteurs de **charges négatives** se déplaçant dans le sens contraire au sens conventionnel du courant
Donc : $\delta q > 0$

Donc : $\boxed{i = \frac{\delta q}{dt} > 0}$



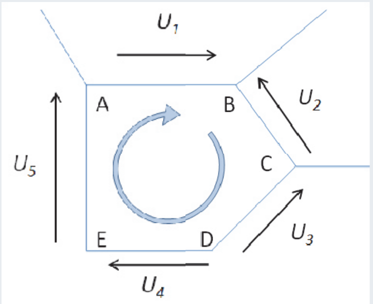
porteurs de **charges négatives** se déplaçant dans le sens conventionnel du courant
Donc : $\delta q < 0$

Donc : $\boxed{i = \frac{\delta q}{dt} < 0}$

Fiche méthode *Sciences physiques*

Loi des mailles et loi des nœuds

1. Loi des mailles



On choisit arbitrairement un sens de rotation dans la maille $ABCDE$. Si une tension d'une des branches de la maille est orientée dans le même sens de rotation, on l'affecte d'un signe $+$, sinon d'un signe $-$.

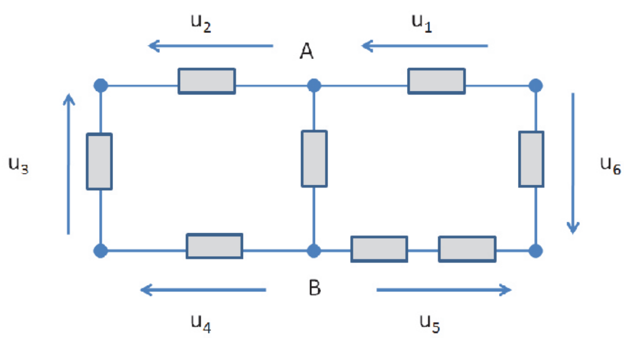
La somme des tensions des branches affectées de leur signe est égale à 0 :

$$U_1 - U_2 - U_3 + U_4 + U_5 = 0$$

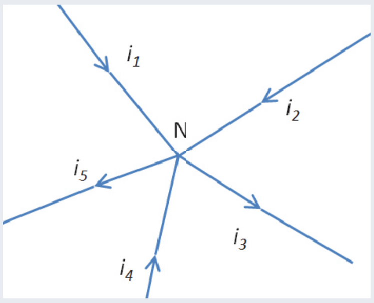
R *La loi des mailles est une conséquence de l'additivité des tensions.*

R *Sur le schéma ci-contre, on peut très bien appliquer la loi des mailles sur la "grande maille" sans avoir à se préoccuper de la branche AB :*

$$u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5 - u_6 = 0$$



2. Loi des nœuds



On affecte d'un signe $+$ les courants qui arrivent vers le nœud N, et d'un signe $-$ ceux qui en partent.

La somme des intensités affectées de leur signe est égale à 0 :

$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

Autre formulation possible et plus facile :

$$\begin{aligned} \text{somme des courants arrivant en } N &= \text{somme des courants repartant de } N \\ \text{ici : } \quad i_1 + i_2 + i_4 &= i_3 + i_5 \end{aligned}$$

R *La loi des nœuds est une conséquence de la conservation de la charge.*

N.Gaudouen

Puissance et énergie échangées par un dipôle

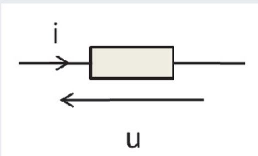
I Puissance d'un dipôle - conventions générateur et récepteur

Le sens conventionnel du courant traversant un dipôle ainsi que l'orientation de la tension à ses bornes relevant d'un choix **arbitraire**, il existe deux types de conventions possibles pour décrire un dipôle.

Elles sont liées aux notions de puissance reçue P_r par le dipôle de la part du reste du ciricuit, et de puissance cédée P_c par le dipôle au reste du circuit, et qui est l'opposé de la puissance reçue.

Convention récepteur

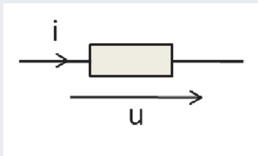
tension $\times$ intensité = puissance reçue



Puissance reçue : $P_r = u\,i$
Puissance cédée : $P_c = -u\,i$

Convention générateur

tension $\times$ intensité = puissance cédée



Puissance cédée : $P_c = u\,i$
Puissance reçue : $P_r = -u\,i$

II Caractère générateur ou récepteur d'un dipôle

- **Un dipôle se comporte comme un <u>récepteur</u> si** $\boxed{P_r > 0}$ *(Donc, si $P_c < 0$)*
- **Un dipôle se comporte comme un <u>générateur</u> si** $\boxed{P_c > 0}$ *(Donc, si $P_r < 0$)*

NE PAS CONFONDRE "convention générateur *(resp. récepteur)*" et "caractère générateur *(resp. récepteur)*" ! !

Ce n'est pas parce qu'un dipôle est représenté en convention générateur *(resp. récepteur)* qu'il se comporte nécessairement comme un générateur *(resp. récepteur)* ! !

R *Une résistance R vérifie la loi d'Ohm, en convention récepteur : $u = Ri$.*
Donc $P_r = Ri^2$, la puissance reçue est toujours positive. Une résistance se comporte donc toujours comme un récepteur.

Ce n'est pas le cas des condensateurs et des bobines qui peuvent aussi bien se comporter comme des générateurs que comme des récepteurs.

III Relation entre puissance et énergie

Puissance reçue et énergie reçue

Pour un dipôle recevant la quantité élémentaire d'énergie δW pendant un intervalle de temps dt, la puissance reçue est :

$$P_r = \frac{\delta W}{dt}$$

Donc : $\delta W = P_r dt$

L'énergie totale reçue par un dipôle entre deux instants t_1 et t_2 est donc :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} P_r dt$$

Si le dipôle est en convention récepteur, alors : $W = \int_{t_1}^{t_2} uidt$.

Énergie fournie par un dipôle

Comme il s'agit de grandeurs algébriques, l'énergie fournie par un dipôle est l'opposée de l'énergie reçue :

$$\text{énergie fournie} = -\int_{t_1}^{t_2} P_r dt = \int_{t_1}^{t_2} P_c dt$$

Si le dipôle est en convention générateur, alors : énergie fournie $= \int_{t_1}^{t_2} uidt$.

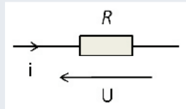
Fiche méthode *Sciences physiques*

Dipôles passifs

Résistor de résistance R

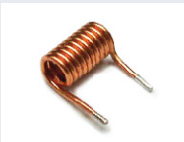
Relation courant tension en **convention récepteur** :

$$\boxed{u = Ri}$$



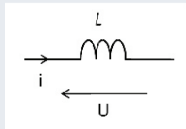
Puissance reçue à : $P_r = u \times i = Ri^2 = \dfrac{u^2}{R} > 0$

Bobine d'inductance L



Relation courant tension en **convention récepteur** :

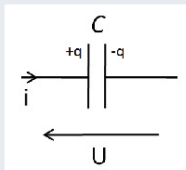
$$\boxed{u = L\,\frac{di}{dt}}$$



Puissance reçue : $P_r = Li\dfrac{di}{dt} = \dfrac{dE_L}{dt}$ où : $E_L(t) = \dfrac{1}{2}Li^2$ **énergie stockée** à t

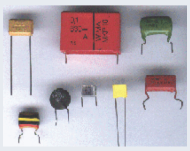
Ⓡ *La puissance $P_r = \dfrac{dE_L}{dt}$ ne pouvant être infinie, cela implique que E_L est une fonction continue du temps.* ***Donc $i(t)$ est une fonction continue du temps pour une bobine.***

Condensateur de capité C



Un condensateur de capacité C est tel que $\boxed{q = Cu}$.

Cela sera surtout exploitable avec la définition de l'intensité : $i = \dfrac{\delta Q}{dt}$



Pour le condensateur, la quantité de charge δQ reçue pendant dt est égale à la variation de la charge $q(t)$: $\delta Q = q(t + dt) - q(t) = dq$

Donc $i = \dfrac{dq}{dt}$. **D'où** la relation courant tension en **convention récepteur** :

$$\boxed{i = C\,\frac{du}{dt}}$$

Puissance reçue : $P_r = Cu\dfrac{du}{dt} = \dfrac{dE_C}{dt}$ où : $E_C(t) = \dfrac{1}{2}Cu^2$ **énergie stockée** à t

Ⓡ *La puissance $P_r = \dfrac{dE_C}{dt}$ ne pouvant être infinie, cela implique que E_C est une fonction continue du temps.* ***Donc $u(t)$ est une fonction continue du temps pour un condensateur.***

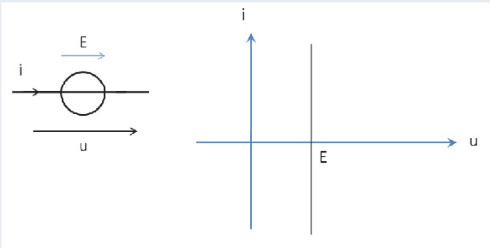
N.Gaudouen

Fiche méthode *Sciences physiques*

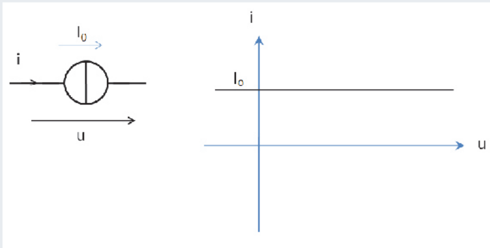
Modèles de Thévenin et Norton

I Sources *idéales* de tension de courant

Source de tension

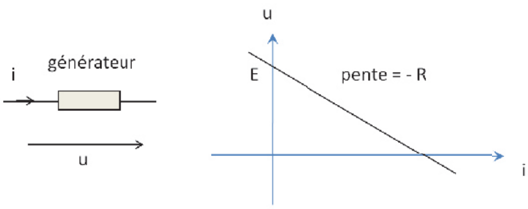


Source de courant



II Modèle de Thévenin et Norton

Généralement, les générateurs réels ne sont pas idéaux et ont une caractéristique affine (ou, au moins, une portion de leur caractéristique) :

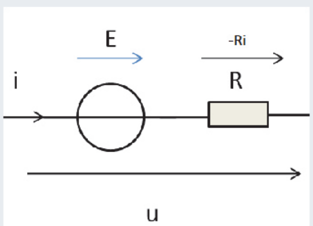


R *Puisqu'il s'agit d'un générateur, on utilise naturellement la convention générateur.*

Il y a deux manières équivalentes d'écrire l'équation de cette caractéristique, d'où deux modèles possibles permettant de représenter le générateur :

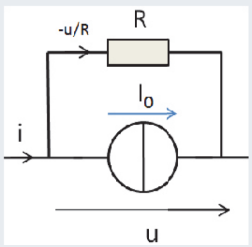
$$u = E - Ri$$

Modèle correspondant : **modèle de Thévenin**



$$i = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}u = I_0 - \frac{1}{R}u \qquad \text{où :} \quad I_0 = \frac{E}{R}$$

Modèle correspondant : **modèle de Norton**



N.Gaudouen

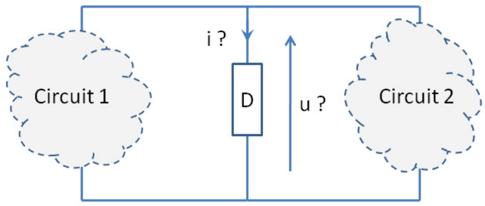
Fiche méthode *Sciences physiques*

Déterminer une tension ou intensité

On rencontre souvent ce type de question :

"***Déterminer la tension u aux bornes du dipôle D***"

ou alors : "***Déterminer l'intensité i traversant le dipôle D***"



où D peut être n'importe quel type de dipôle linéaire (résistor, condensateur, bobine ou générateur linéaire) et les circuits annexes sont également constitués de dipôles linéaires.

1ère méthode (HP) : ramener le circuit à une seule maille

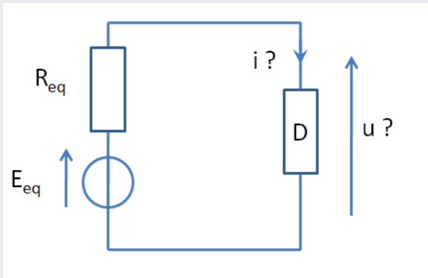
Cette méthode marche uniquement lorsque les dipôles passifs présents dans les circuits annexes sont des résistors (les autres dipôles étant soit des sources de tension, soit des sources de courant).

Méthode

1. **Simplifier le circuit** jusqu'à aboutir à un générateur de Thévenin unique alimentant le dipôle D.

   Pour cela :
   (a) soit utiliser les règles d'associations des résistances et des générateurs linéaires.
   Lors de la simplification du circuit, il faut bien sûr laisser intacte la branche contenant D !

   (b) soit utiliser le théorème de Thévenin.

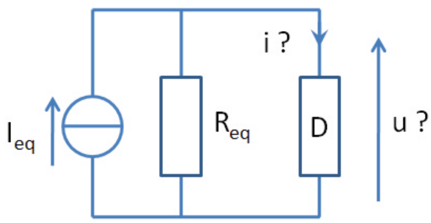


2. **Appliquer la loi des mailles** pour déterminer u. **Se servir de la relation courant-tension** du dipôle D pour déterminer i.
   Si D est un résistor de résistance R, *on peut aussi directement appliquer la formule du pont diviseur de tension :*

$$u = \frac{R}{R + R_{eq}} E_{eq}$$

R *On peut aussi se ramener à un générateur de Norton à l'aide de l'équivalence Thévenin-Norton.*
Dans ce cas, utiliser la loi des noeuds, pour déterminer i et la relation courant-tension pour déterminer u.

Si D est un résistor de résistance R de conductance $G = 1/R$, *on peut aussi directement appliquer la formule du pont diviseur de courant :* $i = \dfrac{G}{G + G_{eq}} I_{eq}$



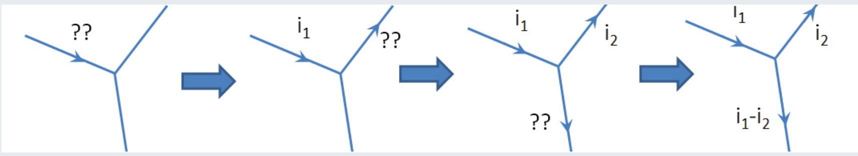
2ème méthode : utilisation de la loi des mailles et la loi des nœuds

Cette méthode se base sur le fait qu'il faut autant d'équations que d'inconnues. La loi des mailles, la loi des nœuds et les relations courant-tension des dipôles sont autant d'équations qu'il est possible d'écrire. Mais il ne faut pas tomber dans le piège d'introduire une intensité inconnue sur chaque branche et une tension inconnue aux bornes de chaque dipôle : cela ferait écrire trop d'équations à résoudre et la clarté du raisonnement en pâtira, sans compter le risque accru de faire des erreurs de calcul.

Il vaut donc mieux introduire des inconnues au fur et à mesure lorsque cela est vraiment nécessaire et avancer méthodiquement pas à pas en suivant la méthode ci-dessous :

Méthode

1. **Appliquer la loi des nœuds** autant de fois que possible.
   Lors de cette étape, on introduira au fur et à mesure des intensités inconnues sur les branches du circuit en appliquant successivement la loi des nœuds directement sur le schéma du circuit, afin de ne pas avoir à introduire des intensités inconnues "superflues" :



2. **Appliquer la loi des mailles.**
   Attention : certaines lois des mailles ne sont pas utiles. C'est le cas lorsque l'on l'applique sur une maille englobant deux autres plus petites : la relation obtenue n'est que la somme des deux relations que l'on obtient en appliquant la loi sur les deux petites mailles, et n'apporte donc pas de nouvelle "information"...

   *Pour ne pas avoir à définir des tensions inconnues aux bornes de chaque dipôle, si cela alourdit trop le raisonnement, **on peut utiliser simultanément les relations courant-tension des dipôles lors de l'application de la loi des mailles**.*

3. **Utiliser les relations courant-tension des dipôles.**
   Faire attention à la convention utilisée !

   Ne pas oublier que l'on connaît la relation courant-tension du dipôle D, donc on connaît une équation supplémentaire reliant i et u.

4. On dispose alors d'un système d'équations.
   Vérifier qu'il y a autant d'équations que d'inconnues.
   À partir de ce système, **se ramener à une seule équation** faisant intervenir une seule inconnue (celle demandée par l'énoncé).
   (Utiliser la méthode de substitution ou combinaison linéaire ...)

R *On peut aussi simplifier d'abord autant que possible le circuit initial en s'inspirant de la méthode 1, puis se ramener alors à la méthode 2, si l'on ne peut pas se ramener à un générateur unique aux bornes de D.*

R *Si les dipôles passifs présents dans le circuit ne sont que des résistors, l'équation à résoudre sera polynômiale (et du premier ordre).*
Par contre, si il y a des condensateurs ou des bobines pour lesquels le lien entre tension et courant est de nature différentielle, l'équation que l'on sera amener à résoudre sera alors elle aussi différentielle.

N.Gaudouen