Le spécialiste de la préparation aux concours dès le Lycée

Classes Préparatoires Scientifiques

1ère année

Stage de pré-rentrée 2016

Mathématiques

(Cours)

Cours Thalès – Horizon Prépa
Établissement privé d'enseignement supérieur

131 Bd Sébastopol 75002 Paris • 01 42 05 41 36 • contact@cours-thales.fr
http://www.cours-thales.fr

Introduction

Étudiantes et étudiants,

Après un cursus au lycée, vous vous apprêtez à rentrer en classe préparatoire aux grandes écoles. Le rythme de travail sera très soutenu, les cours d'une densité beaucoup plus importante. Votre capacité de travail ainsi que votre efficacité seront des éléments essentiels de votre réussite. Ce stage vous propose les points essentiels de révisions ainsi que quelques notions nouvelles pour bien commencer votre rentrée en classe préparatoire aux grandes écoles.
Durant cette semaine de travail, nous allons traiter dans l'ordre les chapitres suivants :

— Fonctions usuelles et réciproques
— Équations différentielles
— Suites et Récurrence
— Nombres complexes
— Nombres réels et Systèmes linéaires

En vous souhaitant un agréable stage,

L'Équipe de Mathématiques
de Cours Thalès.

Fonctions usuelles et réciproques

Fiche de cours

1. Bijection : Définitions

Définitions et propriétés

Dans la suite, on supposera que E et F deux ensembles et que f est une application :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Définition 1. Image

Si $A \subset E$, on appelle **image de A par l'application** f le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x) \in F; x \in A\}.$$

Définition 2. Composition

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. u et v deux fonctions à valeurs réelles définies respectivement sur I et J tels que $u(I) \subset J$.
On définit la fontion composée $v \circ u$ par :

$$u \circ v : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(v(x)) \end{array}.$$

Définition 3. Bijection

La fonction f est dite **bijective** si l'une de ces propriétés équivalentes est vérifiée :

- Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution.
- Il existe une application g de F dans E tel que $fog = id_F$ et $gof = id_E$.

Dans ce cas, g est unique, et appelée **fonction réciproque de** f et se note f^{-1}.

Conseils méthodologiques

Déterminer la réciproque d'une fonction bijective

Si f est une fonction bijective de E dans F alors f^{-1} est définie de F dans E. Pour déterminer l'image d'un élément de F par f^{-1}, on résout l'équation d'inconnue x dans E :

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Autrement dit $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$.

2. Fonctions exponentielle et logarithme

Fonction exponentielle

Définition 4. Fonction exponentielle

La fonction **exponentielle**, notée exp, est l'unique fonction y dérivable vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\, y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{array} \right. .$$

Proposition 1.

1. exp est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.
2. $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
4. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Résoudre une équation avec une exponentielle

La résolution des équations d'inconnue e^x ou $\ln x$ passe très régulièrement par le changement d'inconnue $X = e^x$ ou $X = \ln x$.

Fonction logarithme

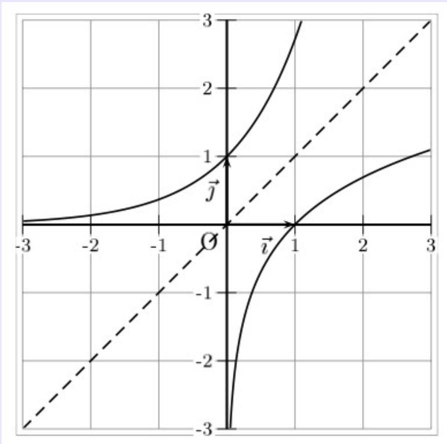
Définition 5. Fonction logarithme népérien

La fonction **logarithme népérien** peut être définie comme l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.
Notée ln, elle est donc définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

L'application réciproque de ln est la fonction exponentielle c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in]0, +\infty[,\ \exp(x) = y \Longleftrightarrow x = \ln y.$$



Proposition 2.

$$\forall x, y \in]0, +\infty[, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Proposition 3.

ln est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Dérivée d'une composée

Proposition 4.

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions tels que $u(I) \subset J$.
Si les fonctions u et v sont dérivables sur leur ensemble de définition alors $u \circ v$ est dérivable sur I et

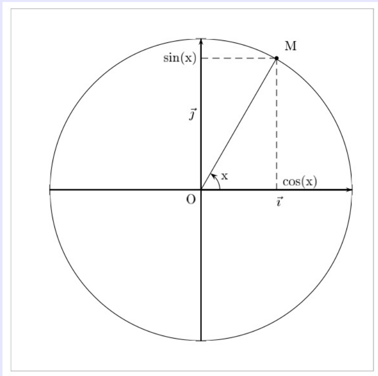
$$\forall x \in I,\ (u \circ v)'(x) = u' \circ v(x) \times v'(x).$$

3. Fonctions trigonométriques

Définitions et propriétés

Définition 6. Fonctions sinus et cosinus

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère un cercle orienté de centre O et de rayon 1. Soit x un réel et M un point qui lui est associé.
On appelle **cosinus** de x et **sinus** de x les coordonnées de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le point M est alors de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$.



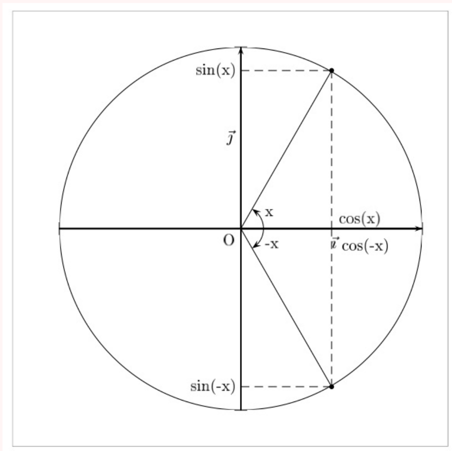
Proposition 5.

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

De plus, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x).$$



Proposition 6. Dérivée des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

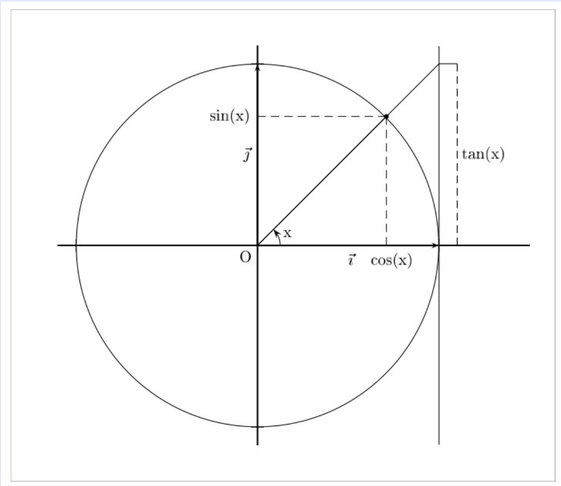
$$\cos' = -\sin \text{ et } \sin' = \cos .$$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$n.d$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Définition 7. Tangente d'un angle

Pour θ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on pose :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$



Théorème 7.

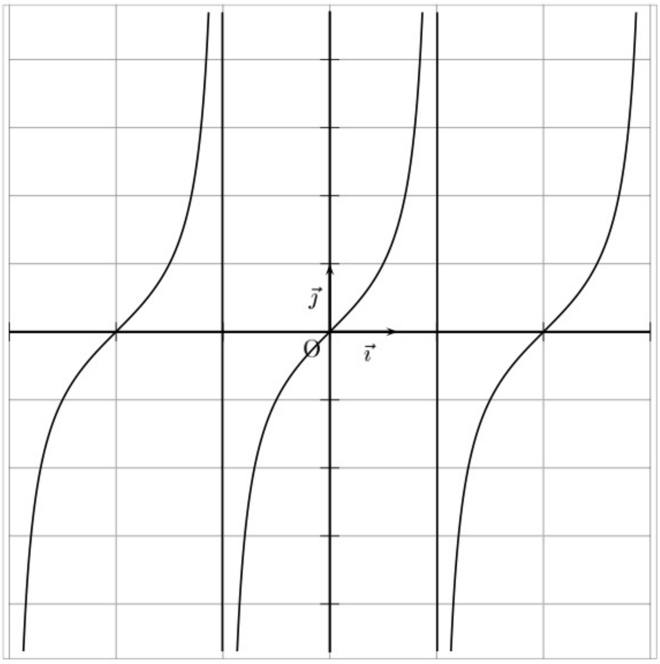
La fonction tan, définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ est π-périodique et impaire. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, elle est dérivable sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ et :

$$\forall x \in I_k,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)};$$

elle est donc strictement croissante sur I_k et, en particulier, sur $I_0 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe de la fonction tangente



Proposition 8.

— Pour tout réel $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, on a :

$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta), \ \ \tan(\pi+\theta) = \tan(\theta) \text{ et } \tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta).$$

— Pour tout réel $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$.

Théorèmes

Proposition 9.

Les formules suivantes sont à connaître par cœur.

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
2. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
3. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
4. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
5. $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$;
6. $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.
7. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
8. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
9. $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2 a}$.

Proposition 10.

Les formules suivantes sont à connaître par cœur.

1. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$.
2. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$.
3. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$.
4. $\sin(a)+\sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$.
5. $\sin(a)-\sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$.
6. $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$.
7. $\cos(a)-\cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$.

4. Dérivation et fonction réciproque

Théorèmes

Proposition 11.

Considérons f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, f'(x) > 0$. La fonction f est alors bijective de I dans $J = f(I)$ et sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall y \in J,\ {f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'of^{-1}(y)}.$$

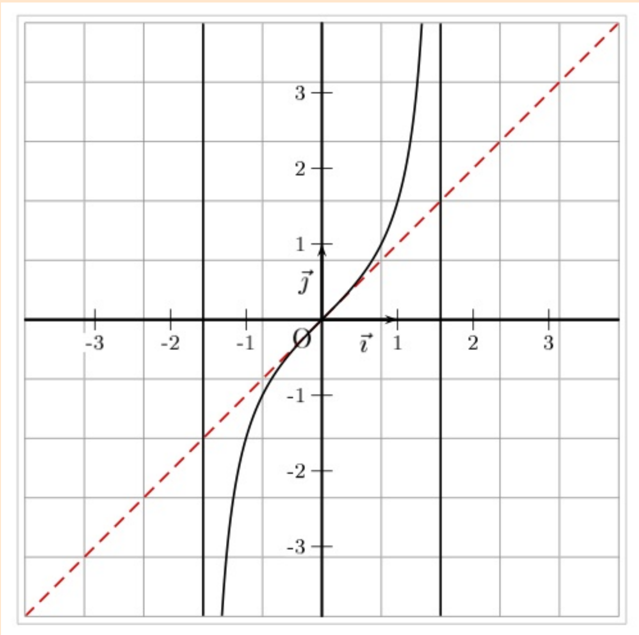
Fonction Arctan

L'application $\begin{array}{rccc} \tan : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$ est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, strictement croissante, et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$; l'application tan admet donc une réciproque, notée $\begin{array}{rccc} Arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{Arctan}(x) \end{array}$ et Arctan est continue sur $\mathbb{R}$. On a ainsi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, (y = \mathrm{Arctan}(x) \Longleftrightarrow x = \tan y).$$

Arctan est impaire. Puisque tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan' y = 1 + \tan^2 y \neq 0$, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\mathrm{Arctan} x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\mathrm{Arctan} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$



x	$-\infty$	$+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Conseils méthodologiques

Représenter une fonction réciproque

Les représentations des courbes de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

Calculer avec les fonctions réciproques

Attention, pour tout x réel, $\tan(\mathrm{Arctan}\ (x)) = x$ (car l'Actant est définie sur $\mathbb{R}$) mais Arctan $(\tan \pi) \neq \pi$. Il faut bien faire attention aux ensembles où les fonctions sont bijections. Par contre, on a toujours Arctan $(\tan x) = x$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Équations différentielles
Fiche de cours

1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Théorèmes

Résolution d'une équation différentielle simple

Considérons l'équation différentielle suivante définie sur $\mathbb{R}$:

$$(E_0\ )\ y' + \lambda y = 0 \text{ où } \lambda \text{ est une constante réelle.}$$

La solution générale de (E_0) est l'ensemble des fonctions **définies sur** $\mathbb{R}$ par

$$f_C : x \mapsto Ce^{-\lambda t} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Le but de cette partie est de résoudre les équations différentielles linéaire du premier ordre sous la forme :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont deux fonctions continues définis sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Résolution des équations différentielles homogènes

Considérons l'équation homogène suivante définie sur I :

$$(E_0\ )\ y' + a(x)y = 0$$

La solution générale de (E_0) est l'ensemble des fonctions **définies sur** I par $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\int a(t)dt} = \lambda e^{A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I.

Résolution des équations différentielles

La solution générale de l'équation différentielle

$$\text{(E) } y' + ay = b$$

est la somme d'une solution particulière avec la solution générale de l'équation différentielle homogène associée.

Conseils méthodologiques

Savoir résoudre une équation différentielle

Vous devez savoir résoudre des équations différentielles «type» à l'aide des différents exemples et exercices effectués.

Déterminer une solution particulière

Pour déterminer une solution particulière, énonçons plusieurs méthodes :

— (E) admet une solution évidente sous la forme du second membre.

— **Principe de superposition des solutions**. Si le second membre b se décompose de manière simple en une combinaison linéaire de plusieurs fonctions de types variés $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$, on pourra déterminer, pour chaque équation (E_k) $y' + ay = b_k$ une solution particulière y_k, puis $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E).

— **Méthode de variation de la constante (Méthode de Lagrange).** En partant de la solution générale de l'équation homogène sous la forme $y = \lambda e^{-A}$ dans l'intervalle I, on fait "varier la constante" en cherchant une solution particulière de l'équation différentielle sur I sous la forme :

$$y_0(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}.$$

En injectant la fonction dans l'équation différentielle, on obtient généralement une équation différentielle plus simple d'inconnue la fonction λ.

2. Équations différentielles linéaires du second ordre

Théorèmes

Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre homogène

Dans cette proposition, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Considérons l'équation différentielle homogène suivante :

$$y'' + ay' + by = 0$$

Considérons l' **équation caractéristique** $r^2 + ar + b = 0$ (inconnue $r \in \mathbb{K}$) et son discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

— **1° cas :** L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{K}$ deux solutions r_1, r_2 distinctes alors la solution générale de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

— **2° cas :** L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{K}$ une solution double $r_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)$ (c'est à dire $\Delta = 0$) alors la solution générale de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

— **3° cas :** L'équation caractéristique n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$ (c'est à dire : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Delta < 0$ et deux solutions complexes conjugués : $z = \alpha \pm i\beta$) alors la solution générale de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$y(x) = \left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$

ou,

$$y(x) = A \cos(\beta x - \varphi) e^{\alpha x} \text{ où } (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et g est une fonction continue définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Considérons :

$$\text{(E) } y'' + ay' + by = g$$

$$(E_0) \ y'' + ay' + by = 0$$

La solution générale sur I de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et une solution particulière de(E).

Pour déterminer une solution particulière avec un second membre particulier.

Théorème 1.

Soient $m \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $h : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e^{mx} P(x) \end{array}$. Il existe au moins une solution sur I de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = h$$

de la forme $y(x) = e^{mx} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré :

— $\deg(P)$ si m n'est pas solution de l'équation caractéristique
— $\deg(P) + 1$ si m est solution simple de l'équation caractéristique
— $\deg(P) + 2$ si m est solution double de l'équation caractéristique.

Déterminer une solution particulière

Pour déterminer une solution particulière, énonçons plusieurs méthodes :

- (E) admet une solution évidente sous la forme du second membre.
- **Principe de superposition des solutions**. Si le second membre b se décompose de manière simple en une combinaison linéaire de plusieurs fonctions de types variés $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$, on pourra déterminer, pour chaque équation (E_k) $y'' + ay' + cy = b_k$ une solution particulière y_k, puis $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E).
- Si le second membre est sous la forme $e^{mx}P(x)$, chercher une solution sous la forme $e^{mx}Q(x)$ où le degré du polynôme Q dépend celui du polynôme P.

3. Récapitulatif des dérivées usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de définition
$e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{C}^*$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\text{cotan}x$	$\mathbb{R} - \{n\pi ; n \in \mathbb{Z}\}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\text{cotan}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \text{cotan}^2 x$	$\mathbb{R} - \{n\pi ; n \in \mathbb{Z}\}$
$x^{\alpha+1}$	$(\alpha+1)x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\text{Arctan}x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Suites et récurrence

Fiche de cours

1. Récurrence

Théorèmes

Principe de récurrence

Soit $E \in P(\mathbb{N})$ telle que : $\left\{\begin{array}{l} 0 \in E \\ \forall n \in E, n+1 \in \text{ E} \end{array}\right.$, alors $E = \mathbb{N}$.

Démonstration par récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété portant sur un entier n tel que $n \geqslant n_0$. Pour que $P(n)$ soit vraie pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, il faut et il suffit que l'on ait :

- $P(n_0)$ est vraie
- Pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Formule de binôme de Newton

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Conseils méthodologiques

Utiliser le raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence est un modèle de démonstration très utilisé en Mathématiques. Il a pour avantage de simplifier les démonstrations des résultats difficiles mais pour inconvénient de connaître à priori le résultat obtenu. La compréhension et la rédaction de ce principe est une des bases de votre apprentissage.

Utiliser la formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton est très régulièrement utilisée. Il faut la connaître par cœur.

2. Suites géométrique et arithmético-géométrique

Définitions et propriétés

Définition 1. Suites géométriques

Une suite $(u_n)_n$ dans $\mathbb{R}$ est dite **géométrique** si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ru_n.$$

L'élément r est appelé la **raison** de la suite géométrique $(u_n)_n$.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 r^n$.

Proposition 1.

Soit $r \in \mathbb{R}$; la suite géométrique $(r^n)_n$ converge si et seulement si : $|r| < 1$ ou $r = 1$. De plus :

1. Si $|r| < 1$ alors $r^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
2. Si $r \in]1; +\infty[$ alors $r^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Proposition 2.

Soit $(u_n)_n$ une suite dans $\mathbb{R}$ géométrique de raison différente de 1 donc il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ru_n$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Définition 2. Suite arithmético-géométrique

Il s'agit des suites $(u_n)_n$ de $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique de raison b.

Théorèmes

Suite arithmetico-géométrique

Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \text{ où } a \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

Alors avec $\lambda = a\lambda + b$, on obtient que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = a^n (u_0 - \lambda) + \lambda.$$

3. Monotonie, limite et théorème d'encadrement

Définitions et propriétés

Définition 3. Suite majorée, minorée, bornée

— Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite **majorée** (respectivement **minorée**) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant A$ (respectivement $A \leqslant u_n$).
— Une suite réelle ou complexe $(u_n)_n$ est dite **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Définition 4. Croissance, décroissance

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

- On dit que $(u_n)_n$ est (resp. strictement) **croissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1} \quad (\text{resp. } u_n < u_{n+1})$$

- On dit que $(u_n)_n$ est (resp. strictement) **décroissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} < u_n)$$

- On dit que $(u_n)_n$ est **monotone** si et seulement si $(u_n)_n$ est croissante ou $(u_n)_n$ est décroissante.

Théorèmes

Théorème de la limite monotone

1. Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.
2. Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Théorème d'encadrement

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ (u_n)_n \text{ et } (w_n)_n \text{ convergent vers une même limite } \ell \end{cases}.$$

Alors $(v_n)_n$ converge aussi vers ℓ.

Conseils méthodologiques

Utiliser le théorème de la limite monotone

Le théorème de la limite monotone est très **important** car il assure l'**existence** de la limite d'une suite avant de pouvoir la calculer !

Utiliser le bon théorème

Dans le cours, il faut faire la différence entre deux types de théorème :

1. **Théorème aboutissant à l'existence d'une limite** : Théorème de la limite monotone (principal), ...
2. **Théorème partant de l'existence d'une limite pour aboutir à la limite d'une autre suite** : Théorème d'encadrement, théorème sur la limite de somme, produit, ...

Étudier une suite où la puissance «varie»

Pour étudier la limite d'une suite sous la forme $u_n^{v_n}$ où $u_n > 0$, il faut mettre la suite sous la forme $e^{v_n \ln u_n}$.

Utiliser la méthode du télescopage

La méthode du « télescopage »dans une somme est à retenir. De manière théorique, elle consiste à écrire que :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} - u_0.$$

Déterminer la valeur d'une limite

Très fréquemment, **si on sait qu'un suite** qui vérifie une relation de récurrence **converge**, on passera à la limite dans la relation afin d'obtenir une condition sur la limite.

4. Définition de la limite

Définitions et propriétés

Définition 5. Convergence

— On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ **converge vers** $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \epsilon)$$

— On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ **converge** s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Théorèmes

Unicité de la limite

Si une suite numérique $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors la limite est unique. On notera alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Nombres Complexes

Fiche de cours

1. Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle

Définitions et propriétés

Définition 1. Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le **module** de z est le réel positif $|z| = \sqrt{\text{Re }(z)^2 + \text{Im }(z)^2}$.
De plus, pour tout nombre complexe non nul, il existe un réel θ unique à 2π près, appelé **argument** de z et noté $\text{Arg}(z)$, tel que :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Proposition 1.

1. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z$.
2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |z|$
4. $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $|zz'| = |z||z'|$ et $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$

Proposition 2.

1. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\text{Arg}(\overline{z}) = -\text{Arg}(z)\,[2\pi]$
2. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$, $\text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')\,[2\pi]$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*$, $\text{Arg}(z^n) = n\,\text{Arg}(z)\,[2\pi]$
4. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$, $\text{Arg}\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')\,[2\pi]$

Définition 2. Forme trigonométrique

On note pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

La **forme trigonométrique** d'un nombre complexe non nul z est l'écriture :

$$z = [\rho, \theta] \quad \text{, ou encore} \quad z = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \rho \in \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Conseils méthodologiques

Utiliser l'écriture exponentielle d'un nombre complexe

L'utilisation de l'écriture exponentielle est à préférer pour simplifier les produits (quotients) de nombres complexes. Pour la somme, il est recommandé d'utiliser l'écriture algébrique.

À l'aide de la proposition précédente, on obtient : $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Utiliser la méthode de l'argument-moitié

La méthode de l'argument-moitié est à retenir :

$$e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}\right) = e^{i\frac{x+y}{2}} \times 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$e^{ix} - e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}}\right) = e^{i\frac{x+y}{2}} \times 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

2. Trigonométrie

Théorèmes

Formule de Moivre

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ce qui donne la formule de Moivre :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Théorème 3.

Pour tout z complexe différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Formule d'Euler

Pour tout x réel,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Conseils méthodologiques

Linéariser de $\cos^p(\theta)$ et $\sin^p(\theta)$

Pour linéariser $\cos^p(\theta)$ et $\sin^p(\theta)$,

- on remplace $\cos\theta$ par $\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta$ par $\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$,
- on développe $\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^p$ et $\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^p$ à l'aide de la formule du binôme de Newton pour développer les formules d'Euler
- on regroupe les termes de la forme $e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}=2\cos kx$ ou $e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}=2i\sin kx$ pour obtenir le résultat.

Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

Pour développer $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$, il faut appliquer la formule de Moivre et ensuite la formule du binôme de Newton en calculant :

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta i^k$$

Pour finir, il reste à déterminer la partie réelle de $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ pour obtenir la valeur de $\cos(n\theta)$ et la partie imaginaire pour obtenir la valeur de $\sin n\theta$.

3. Équations

Définitions et propriétés

Définition 3. Racine n-ième

- Si $z\in\mathbb{C}$, on appelle **racine n-ième** de z tout $Z\in\mathbb{C}$ tel que $Z^n=z$.
- Les racines n-ièmes de 1 sont encore appelées **racines n-ièmes de l'unité**.
  L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Racine n-ième d'un nombre complexe non nul

Soit n un entier naturel non nul.
Tout nombre complexe non nul admet, dans $\mathbb{C}$, exactement n racines n-èmes deux à deux distincts c'est-à-dire l'équation $z^n=Z$ d'inconnue z admet exactement n solutions dans $\mathbb{C}$ pour tout Z complexe non nul.

Résolution des équations $z^2=Z$ dans $\mathbb{C}$

Soient $Z=X+iY\in\mathbb{C}^*$ et $z=x+iy\in\mathbb{C}$.

$$z^2=Z \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{X^2+Y^2} \\ x^2-y^2=X \\ 2xy=Y \end{cases}$$

Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Considérons l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** du trinôme, on a :

— si $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}, \quad \text{où } \delta \text{ est une racine carrée complexe de } \Delta$$

— si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution, dite **double** :

$$z_0 = -\frac{-b}{2a}.$$

Les solutions, distinctes ou non, z_1, z_2 vérifient :

$$z_1 + z_2 = -b/a, z_1 z_2 = c/a.$$

Conseils méthodologiques

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Considérons l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. — si $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, \; z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

   où δ est une racine carrée complexe de Δ que l'on détermine à l'aide d'un système de trois équations à deux inconnues.

   — si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution, dite **double** :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Nombres réels et Systèmes linéaires

Fiche de cours

1. Nombres réels

Conseils méthodologiques

Savoir rédiger une récurrence

Pour rédiger une récurrence :

1. Pour n dans $\mathbb{N}$, rédiger clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$ au rang n.
2. **Initialisation** : On vérifie que la propriété est vraie au rang initial. Dans la plupart des cas, 0 ou 1.
3. **Hérédité** : On suppose que la propriété est vérifiée à un rang n. Le but est de montrer qu'elle est vérifiée au rang $n+1$.
4. Conclure à l'aide du raisonnement par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier n plus grand que le rang d'initialisation.

Savoir majorer ou minorer des expressions

Il faut bien connaître les mécanismes qui permettent de majorer ou minorer des expressions. Voici quelques exemples :

- Inégalité triangulaire
- Nombre réel au carré positif.
  Exemple : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 0$ implique $-2ab \leqslant a^2 + b^2$.
- Croissance ou décroissance des fonctions de référence
- Croissance de l'intégrale
- ...

2. Systèmes linéaires

Conseils méthodologiques

Résoudre un système linéaire

À de rares exceptions près, l'algorithme du pivot de Gauss est à la fois le plus économique en termes de calcul et le plus susceptible de conduire sans encombre au résultat correct.
Soit (S) le système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Posons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

1. Opération sur la première colonne.
   (a) Si $a_{11} \neq 0$, alors on effectue les opérations pour tout i dans $[\![1,n]\!]$,
   $$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1.$$
   La première colonne a alors uniquement sa première composante non nulle.
   (b) Si $a_{11} = 0$ et qu'il existe i_0 dans $[\![1,n]\!]$ tel que $a_{i_01} \neq 0$. On effectue alors $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$. Ainsi la première composante de la première colonne est non nulle et on est ramené au cas précédent.
   (c) Si la première colonne est nulle alors x_1 est un paramètre de la solution du système linéaire.
2. Opération sur les colonnes suivantes.
   On continue les opérations décrites précédemment en commençant par la ligne j de la colonne j pour obtenir un système échelonnée par lignes.
3. On obtient un système triangulaire supérieure simple à résoudre en commençant par la dernière ligne et en injectant les résultats trouvés dans les lignes précédentes de proche en proche.

Prépas Maths Sup et Maths Spé
Sup MPSI / PCSI / PTSI - Spé MP / MP* ; PSI / PSI* ; PC / PC* ; PT / PT*

Stages 2016 / 2017 :

Toussaint (24 au 28/10)
Noël (19 au 23/12 et 26 au 30/12)
Février (6 au 10/02 et 13 au 17/02)
Pâques (3 au 7/04 et 10 au 14/04)

Téléchargez notre application :

- *Évaluez le stage et les professeurs*
- *Recevez des actualités sur les concours et nos stages*

Suivi hebdomadaire en prépas :

Nouveauté 2016
Séances thématiques chaque samedi

- *Samedi 17/09 : Raisonnement et vocabulaire ensembliste*
- *Samedi 24/09 : Oscillateur harmonique*
- *Samedi 1/10 : Calculs algébriques – Nombres complexes*

……….

Cours Thalès – Horizon Prépa
Établissement privé d'enseignement supérieur
131 Bd Sébastopol 75002 Paris • 01 42 05 41 36 • contact@cours-thales.fr
http://www.cours-thales.fr