



Le spécialiste de la préparation aux concours dès le Lycée

Classes Préparatoires Scientifiques

1^{ère} année

Stage de pré-rentree 2016

Mathématiques

(Exercices)

Cours Thalès – Horizon Prépa
Établissement privé d'enseignement supérieur

131 Bd Sébastopol 75002 Paris • 01 42 05 41 36 • contact@cours-thales.fr
<http://www.cours-thales.fr>

Fonctions usuelles et réciproques

Fiche d'exercices

Cette fiche d'exercices est accompagnée d'une fiche de cours où vous trouverez les éléments de cours permettant de résoudre les différents exercices qui suivent.

1. Bijection : Définitions

Exercice 1.

Donner des exemples de fonctions bijectives.

2. Fonctions exponentielle et logarithme

Fonction exponentielle

Exercice 2.

On pose pour tout x réel, $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Résoudre pour tout y réel, l'équation $y = \operatorname{sh}(x)$ d'inconnue x .
2. En déduire que la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa réciproque.

Fonction logarithme

Exercice 3.

Démontrer que :

$$\forall x, y \in]0, +\infty[, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Dérivée d'une composée

Exercice 4.

Montrer, de deux façons différentes (calcul direct et étude de fonctions) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \ln(\sqrt{1 + x^2} - x) = 0.$$

3. Fonctions trigonométriques

Exercice 5.

Résoudre les équations :

- a. $\cos 2x + \cos x = 0$;
- b. $\sin 5x - \sin x = 0$.

Exercice 6. (La transformation de $a \cos t + b \sin t$.)

Soit a et b deux réels non nuls tous les deux (i.e l'un des deux au moins n'est pas nul).

Montrer qu'il existe un réel $\varphi \in [-\pi, \pi]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi).$$

Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3} \cos(2x) - \sin(2x) = 1$.

4. Dérivation et fonction réciproque**Exercice 7.**

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. f une application bijective de I dans J et f^{-1} sa réciproque. Montrer que si f et f^{-1} sont dérivables alors

$$\forall y \in J, f^{-1'}(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}.$$

Exercice 8.

On s'intéresse à l'application $\varphi : x \mapsto x \ln(x)$.

- Etudier φ , c'est à dire :
 - Donner le domaine de définition de φ ;
 - Dresser tableau de variation (avec limites aux bornes) et graphe.
- Justifier que φ établit une bijection de $[1/e; +\infty[$ sur $[-1/e; +\infty[$.
On note $\varphi^{-1} : [-1/e, +\infty[\rightarrow [1/e; +\infty[$ son application réciproque. Donner $\varphi^{-1}(0)$.
- Prouver que φ^{-1} est dérivable sur $] -1/e, +\infty[$, et que pour $y \geq -\frac{1}{e}$, $(\varphi^{-1})'(y) = \frac{\varphi^{-1}(y)}{y + \varphi^{-1}(y)}$.
- Donner une équation cartésienne C de la tangente T_0 au graphe de φ^{-1} au point d'abscisse 0.
- Application : soit $y \in \mathbb{R}$. Discuter, en fonction de y , du nombre de solutions de l'équation $(E) : x^x = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+,*}$. On pourra utiliser l'étude de φ .

Exercice 9.

- Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$ est dérivable sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, strictement croissante, et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$.
- Montrer que l'application $\tan$ admet une réciproque, notée $\text{Arctan} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \text{Arctan}(x) \end{array}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la dérivée de Arctan .
- Montrer que Arctan est impaire.
- Représenter la fonction Arctan . On pourra utiliser le graphique de la fonction tangente mis à disposition dans la fiche de cours.

Exercice 10.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

- $\text{Arctan} x = 2 \text{Arctan} \frac{1}{2}$
- $\text{Arctan} x + \text{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 11.

Étudier la continuité et la dérivabilité de $f(x) = \text{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$.

Équations différentielles

Fiche d'exercices

Cette fiche d'exercices est accompagnée d'une fiche de cours où vous trouverez les éléments de cours permettant de résoudre les différents exercices qui suivent.

1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1.

Considérons l'équation différentielle suivante définie sur $\mathbb{R}$:

$$(E_0) \quad y' + \lambda y = 0 \text{ où } \lambda \text{ est une constante réelle.}$$

Montrer que la solution générale de (E_0) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_C : x \mapsto Ce^{-\lambda x} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.

Résoudre $y' - \frac{x+1}{x^2}y = 0$ où la fonction y est définie sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3.

Résoudre $(E) : y' + 2y = e^{2x} + e^{-x}$, où y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

Résoudre $(E) : y' = -y + e^{-t} \cos(t)$, où y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'(x) + y(x) = x^2 - 2x + 3.$

c. $y' - \frac{e^x}{e^x + 1}y = 2x(e^x + 1).$

b. $y' + y = e^{3x} + 2x.$

d. $xe^y y' - 2e^y + x^2 = 0$ sur $]0, 1[.$

2. Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 6.

Résoudre : $y'' + y' + y = 0$ où y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Résoudre : $(E) \quad y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + 5e^{-x}$ où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^x.$

b. $y'' + y = x \cos x$

c. $y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)e^{2x}$

d. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0.$

Suites et récurrence

Fiche d'exercices

Cette fiche d'exercices est accompagnée d'une fiche de cours où vous trouverez les éléments de cours permettant de résoudre les différents exercices qui suivent.

1. Récurrence

Exercice 1. $(\sum_{k=0}^n k, \sum_{k=0}^n k^2, \sum_{k=0}^n k^3)$

Montrer que pour tout entier naturel n :

1. $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout entier naturel p et n tel que $p < n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \text{ où } \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

2. En déduire la formule du binôme de Newton par récurrence.

2. Suites géométrique et arithmético-géométrique

Exercice 3. (Description des suites arithmético-géométrique)

Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que si $a = 1$ alors pour tout n entier naturel, $u_n = nb + u_0$.
2. Supposons dans la suite $a \neq 1$.
 - (a) Posons λ le réel tel que $\lambda = a\lambda + b$ et pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \lambda$. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique. En déduire une expression générale de v_n .
 - (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = a^n(u_0 - \lambda) + \lambda$.

3. Monotonie, limite et théorème d'encadrement

Exercice 4.

1. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{\sin n}{n}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer si elle existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(a^n)^{\frac{1}{n}}$ où $E(a)$ est la partie entière de a .

Exercice 5.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels vérifiant pour tout naturel n , $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{3^n}$.

1. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$.
3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 6. (Avec décomposition d'une fraction rationnelle)

1. Déterminer des réels a , b et c tels que pour tout entier $k \geq 3$, $\frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} + \frac{c}{k-2}$.
2. Utiliser ce qui précède pour calculer, pour $n \geq 3$, $F_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k-1)(k-2)}$.
3. En déduire la convergence et la limite de la suite $(F_n)_{n \geq 3}$.
4. En étudiant la monotonie de $(F_n)_{n \geq 3}$, en déduire que cette suite est majorée par sa limite.
5. Posons, si $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.
 - (a) Étudier la monotonie de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (b) A l'aide de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, majorer $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (c) Conclusion.

Exercice 7.

Étudier la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases}$. Pour cela, on procèdera de la manière suivante :

1. Montrer que la suite (u_n) est positive puis décroissante.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. Notons ℓ sa limite.
3. Montrer que ℓ vérifie l'équation suivante : $\ell = \frac{\ell}{\ell^2 + 1}$.
4. En déduire la valeur de ℓ .

4. Définition de la limite

Exercice 8.

Démontrer que si une suite numérique $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors la limite est unique.

Exercice 9.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ et $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a + b$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$.

Nombres Complexes

Fiche d'exercices

Cette fiche d'exercices est accompagnée d'une fiche de cours où vous trouverez les éléments de cours permettant de résoudre les différents exercices qui suivent.

1. Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle

Exercice 1.

Écrire sous forme trigonométrique :

1. $z = 2 - 2i$;

3. $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$;

2. $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$;

4. $z = 1+i \tan(\theta)$, pour θ réel différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π . En déduire $(1+i\sqrt{3})^{12}$.

Exercice 2. (Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$)

On considère les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 2 - 2i$ et $a = \frac{z_1^4}{z_2^3}$.

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1 , z_2 , z_1^4 et z_2^3 .
2. En déduire la forme algébrique des nombres complexes z_1^4 , z_2^3 et a .
3. Calculer le module et un argument de a .
4. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Vérifier les résultats obtenus avec votre calculatrice.

Exercice 3. (Méthode de l'argument moitié)

Écrire sous forme trigonométrique :

1. $z = (1-i)^n + (1+i)^n$

3. $z = e^{iy} + e^{ix}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

2. $z = 1 + e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$

4. $z = \frac{e^{ix} - 1}{e^{ix} + 1}$, $x \in]-\pi; \pi[$

Exercice 4.

Montrer que pour tout réel x , $|e^{ix} - 1| \leq |x|$.

2. Trigonométrie

Exercice 5.

Soit x un réel, $x \neq 0 \bmod \pi$.

1. Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

2. Calculer : $\frac{\sin(5x)}{\sin x}$.

Exercice 6.

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

Exercice 7.

Soit x un réel.

1. Linéariser $\sin^2 x$.
2. Linéariser $\cos^3 x$.

3. Linéariser $\sin^3(x)$.

3. Équations

Exercice 8*.

Soit n un entier naturel non nul et a un nombre complexe non nul.
Montrer que l'équation $z^n = a$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $w^6 = -1$;

Exercice 10.

Soit $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Que vaut α^5 ?
2. Calculer $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$.
3. Montrer que $(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^4 + \alpha + 1) = \alpha(\alpha + 1)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la partie imaginaire de $(\alpha^2 + \alpha + 1)^n$.

Exercice 11.

Calculer les racines deuxièmes de $2 - i$ sous forme algébrique.

Exercice 12.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $(1 - i)z^2 - (5 - i)z + 10 = 0$.
2. $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$.
3. $z^2 - 2iz + i\sqrt{3} = 0$.

Nombres réels et Systèmes linéaires

Fiche d'exercices

Cette fiche d'exercices est accompagnée d'une fiche de cours où vous trouverez les éléments de cours permettant de résoudre les différents exercices qui suivent.

1. Nombres réels

Exercice 1.

Montrer que : $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et que $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 2.

Démontrer les résultats suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \sum_{k=1}^n k.k! = (n+1)!.$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$

Exercice 3.

Démontrer les inégalités suivantes (a, b et c sont des nombres réels) :

1. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, avec $a, b, c > 0$.
2. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
3. $\frac{a^2 + b^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout réel $a > 0$, $a + \frac{1}{a} \geq 2$.
2. Montrer que si $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ et $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, alors $(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n) \geq 2^n$.

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $T_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (2k+1)$

1. En distinguant les cas n pair ($n = 2m$) et n impair ($n = 2m+1$), déterminer

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k.$$

2. Posons $\tau_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}$. Montrer que $T_n = 2\sigma_n + \tau_n$ et en déduire la valeur de T_n .

2. Systèmes linéaires

Exercice 6.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Résoudre le système
$$\begin{cases} x + ay + a^2z &= 1 \\ x + ay + abz &= a \\ bx + a^2y + a^2bz &= a^2b \end{cases}.$$

Exercice 7.

Soit $m \in \mathbb{C}$. Résoudre
$$\begin{cases} x - my + m^2z &= 2m \\ mx - m^2y + mz &= 2m \\ mx + y - m^2z &= 1 - m \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x + y + mz &= m \\ x + my - z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \end{cases}.$$

Exercice 8. (Systèmes à paramètres)

Résoudre en discutant s'il y a lieu, les systèmes suivants :

1.
$$\begin{cases} \alpha x + y + z &= \alpha \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{cases} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$
2.
$$\begin{cases} x + ay + a^2z &= 1 \\ x + ay + abz &= a \\ bx + a^2y + a^2bz &= a^2b \end{cases} \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$



Prépas Maths Sup et Maths Spé
Sup MPSI / PCSI / PTSI - Spé MP / MP* ; PSI / PSI* ; PC / PC* ; PT / PT*

Stages 2016 / 2017 :

Toussaint (24 au 28/10)
Noël (19 au 23/12 et 26 au 30/12)
Février (6 au 10/02 et 13 au 17/02)
Pâques (3 au 7/04 et 10 au 14/04)



Téléchargez notre application :

- Évaluez le stage et les professeurs
- Recevez des actualités sur les concours et nos stages

Suivi hebdomadaire en prépas :

Nouveauté 2016

Séances thématiques chaque samedi

- Samedi 17/09 : Raisonnement et vocabulaire ensembliste
 - Samedi 24/09 : Oscillateur harmonique
- Samedi 1/10 : Calculs algébriques – Nombres complexes

.....

Cours Thalès – Horizon Prépa

Établissement privé d'enseignement supérieur

131 Bd Sébastopol 75002 Paris • 01 42 05 41 36 • contact@cours-thales.fr

<http://www.cours-thales.fr>