Fonctions usuelles et réciproques

Fiche de cours

1. Bijection : Définitions

Définitions et propriétés

Dans la suite, on supposera que E et F deux ensembles et que f est une application :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Définition 1. Image

Si $A \subset E$, on appelle **image de A par l'application** f le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x) \in F; x \in A\}.$$

Définition 2. Composition

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. u et v deux fonctions à valeurs réelles définies respectivement sur I et J tels que $u(I) \subset J$.
On définit la fontion composée $v \circ u$ par :

$$u \circ v: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(v(x)) \end{array}.$$

Définition 3. Bijection

La fonction f est dite **bijective** si l'une de ces propriétés équivalentes est vérifiée :

- Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution.
- Il existe une application g de F dans E tel que $fog = id_F$ et $gof = id_E$.

Dans ce cas, g est unique, et appelée **fonction réciproque de** f et se note f^{-1}.

Conseils méthodologiques

Déterminer la réciproque d'une fonction bijective

Si f est une fonction bijective de E dans F alors f^{-1} est définie de F dans E. Pour déterminer l'image d'un élément de F par f^{-1}, on résout l'équation d'inconnue x dans E :

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Autrement dit $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$.

2. Fonctions exponentielle et logarithme

Fonction exponentielle

Définition 4. Fonction exponentielle

La fonction **exponentielle**, notée exp, est l'unique fonction y dérivable vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\, y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{array}\right. .$$

Proposition 1.

1. exp est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
4. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Résoudre une équation avec une exponentielle

La résolution des équations d'inconnue e^x ou $\ln x$ passe très régulièrement par le changement d'inconnue $X = e^x$ ou $X = \ln x$.

Fonction logarithme

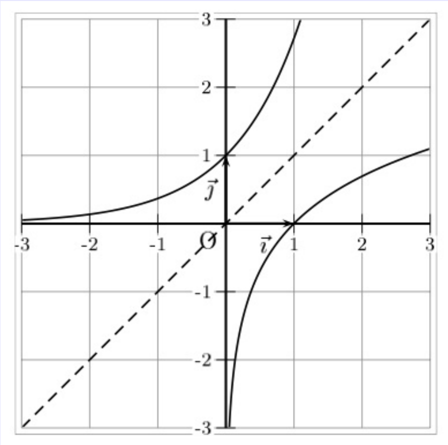
Définition 5. Fonction logarithme népérien

La fonction **logarithme népérien** peut être définie comme l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.
Notée ln, elle est donc définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

L'application réciproque de ln est la fonction exponentielle c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in]0, +\infty[,\ \exp(x) = y \iff x = \ln y.$$



Proposition 2.

$$\forall x, y \in]0, +\infty[, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Proposition 3.

ln est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Dérivée d'une composée

Proposition 4.

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions tels que $u(I) \subset J$.
Si les fonctions u et v sont dérivables sur leur ensemble de définition alors $u \circ v$ est dérivable sur I et

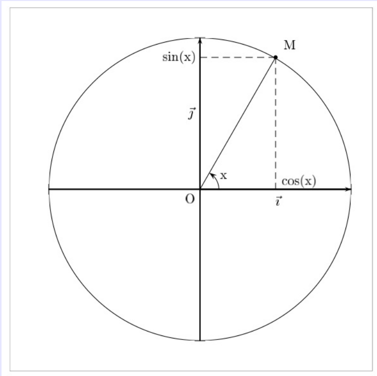
$$\forall x \in I,\ (u \circ v)'(x) = u' \circ v(x) \times v'(x).$$

3. Fonctions trigonométriques

Définitions et propriétés

Définition 6. Fonctions sinus et cosinus

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère un cercle orienté de centre O et de rayon 1. Soit x un réel et M un point qui lui est associé.
On appelle **cosinus** de x et **sinus** de x les coordonnées de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le point M est alors de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$.



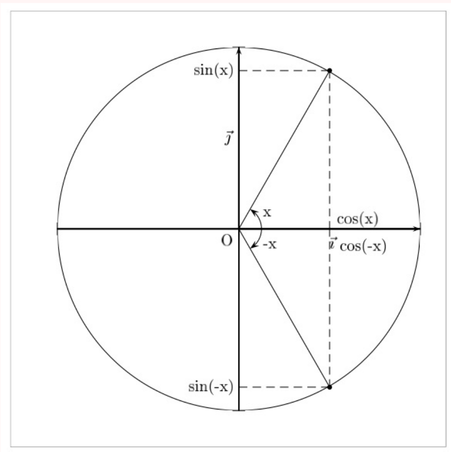
Proposition 5.

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

De plus, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x).$$



Proposition 6. Dérivée des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

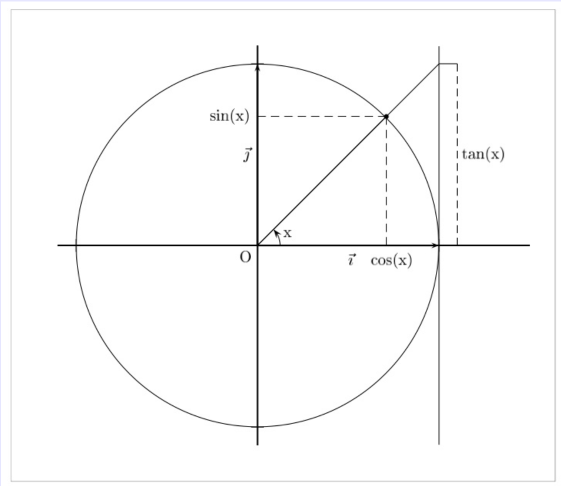
$$\cos' = -\sin \text{ et } \sin' = \cos .$$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$n.d$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Définition 7. Tangente d'un angle

Pour θ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on pose :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$



Théorème 7.

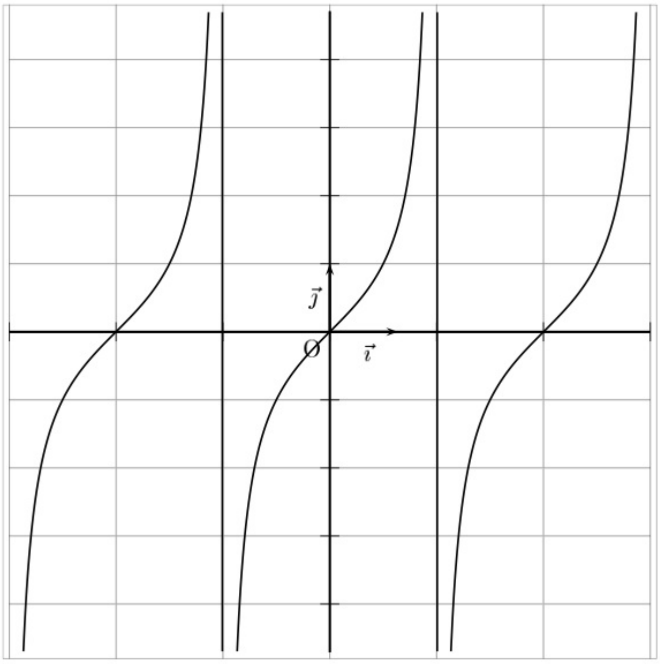
La fonction tan, définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ est π-périodique et impaire. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, elle est dérivable sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ et :

$$\forall x \in I_k,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)};$$

elle est donc strictement croissante sur I_k et, en particulier, sur $I_0 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
tan	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

Courbe de la fonction tangente



Proposition 8.

— Pour tout réel $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a :

$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta),\ \ \tan(\pi+\theta) = \tan(\theta) \text{ et } \tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta).$$

— Pour tout réel $\theta \not\equiv 0\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$.

Théorèmes

Proposition 9.

Les formules suivantes sont à connaître par cœur.

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
2. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
3. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
4. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
5. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$;
6. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.
7. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
8. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
9. $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2 a}$.

Proposition 10.

Les formules suivantes sont à connaître par cœur.

1. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$.
2. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$.
3. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$.
4. $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$.
5. $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$.
6. $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$.
7. $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$.

4. Dérivation et fonction réciproque

Théorèmes

Proposition 11.

Considérons f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, f'(x) > 0$. La fonction f est alors bijective de I dans $J = f(I)$ et sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall y \in J,\ {f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f' o f^{-1}(y)}.$$

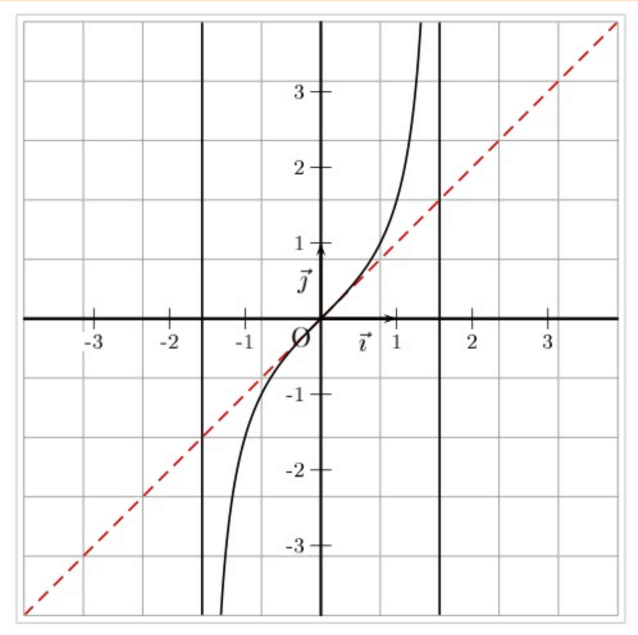
Fonction Arctan

L'application $\begin{array}{rccc} \tan : & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$ est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, strictement croissante, et $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$; l'application tan admet donc une réciproque, notée $\begin{array}{rccc} Arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{Arctan}(x) \end{array}$ et Arctan est continue sur $\mathbb{R}$. On a ainsi :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, (y=\mathrm{Arctan}(x) \Longleftrightarrow x=\tan y).$$

Arctan est impaire. Puisque tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que $\forall y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan' y = 1+\tan^2 y \neq 0$, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\mathrm{Arctan} x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$



x	$-\infty$	$+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Conseils méthodologiques

Représenter une fonction réciproque

Les représentations des courbes de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à l'axe $y=x$.

Calculer avec les fonctions réciproques

Attention, pour tout x réel, $\tan(\mathrm{Arctan}\ (x)) = x$ (car l'Actant est définie sur $\mathbb{R}$) mais $\mathrm{Arctan}\ (\tan\pi) \neq \pi$. Il faut bien faire attention aux ensembles où les fonctions sont bijections. Par contre, on a toujours $\mathrm{Arctan}\ (\tan x) = x$ pour $x\in]-\pi/2,\pi/2[$.