Séries numériques

Point méthode

1. Utilisation d'une série géométrique

- (a) On s'assure qu'il s'agit bien d'une série géométrique en mettant en évidence le premier terme et la raison.
- (b) On compare le module (ou la valeur absolue) de la raison à 1 et on conclut quant à la convergence et à la valeur de la somme.

2. Principe de télescopage. Si le terme général u_n d'une série s'écrit facilement sous la forme $f(n) - f(n+1)$, où f est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{K}$:

- (a) On calcule la somme partielle d'ordre n par « télescopage » :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (f(k) - f(k+1)) = \sum_{k=0}^n f(k) - \sum_{k=0}^n f(k+1) \\ &= \sum_{k=0}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n+1} f(k) = f(0) - f(n+1). \end{aligned}$$

- (b) On détermine, si elle existe, la limite de f en $+\infty$ et on conclut sur la nature de la série et la valeur de sa somme éventuelle.
- (c) Il existe des formes de télescopage plus complexes, par exemple :

$$\sum_{n=p}^q (f(n+1) - f(n-1)) \text{ ou } \sum_{n=p}^q (f(n+1) - 2f(n) + f(n-1));$$

dans ce cas, on peut décomposer linéairement ces sommes partielles, puis décaler les indices pour faire apparaître des sommes communes qui se simplifient, ne laissant que quelques termes résiduels.

Point méthode

f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour déterminer la nature de la série $\sum f(n)$, on peut utiliser directement le théorème du cours permettant de se ramener à l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$. Mais, pour encadrer une somme partielle ou un reste de cette série, il est plus efficace de construire et d'interpréter, à chaque occasion la figure habituelle.

1. $\int_{k-1}^k f(t) dt$ et $\int_k^{k+1} f(t) dt$ s'interprètent respectivement comme les aires des portions de plan « sous la courbe » :

$$\{(x, y), k-1 \leq x \leq k, 0 \leq y \leq f(x)\} \text{ et } \{(x, y), k \leq x \leq k+1, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

$f(k)$ s'interprète indifféremment comme l'aire du rectangle $[k-1, k] \times [0, f(k)]$ ou l'aire du rectangle $[k, k+1] \times [0, f(k)]$.

2. La lecture de la figure conduit alors à l'encadrement :

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

3. On somme membre à membre les encadrements précédents, en rajoutant, au besoin, $f(0)$ pour obtenir :

$$f(0) + \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$$

ou

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

4. On calcule les intégrales pour obtenir un encadrement, puis, éventuellement, un équivalent de la somme partielle ou du reste.

Point méthode

Pour montrer qu'une **série à termes positifs** $\sum u_n$ **converge**, on peut :

1. Montrer que la suite (S_n) des sommes partielles est majorée ;
2. Chercher une suite (v_n) telle que : $\forall n, u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge ;
3. Chercher une suite (v_n) à termes positifs telle que : $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge ;
4. Chercher une suite (v_n) à termes positifs telle que : $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge ;
5. Calculer un développement limité de u_n ;
6. Comparer u_n à une intégrale de fonction positive décroissante.

Point méthode

La formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

permet de trouver un équivalent du terme général dans certains cas favorables où celui-ci comporte des factorielles. On utilise ensuite les théorèmes de comparaison usuels.

Point méthode

Soit une série numérique $\sum u_n$ qui semble alternée :

1. On s'assure qu'elle l'est réellement en vérifiant que u_n et u_{n+1} sont, pour tout n , des réels de signes contraires.
2. On vérifie que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et converge vers 0.
3. La convergence de $\sum u_n$ n'est pas la seule conclusion du critère. On a aussi : la somme de la série est du signe de son premier terme et elle est comprise entre deux sommes partielles consécutives ; le reste d'ordre n est du signe de son premier terme et sa valeur absolue est majorée par la valeur absolue de ce premier terme : $|u_{n+1}|$.

Point méthode

Pour montrer qu'une **série à termes complexes** $\sum u_n$ **converge**, on peut :

1. Si la série est alternée, regarder si elle satisfait le critère spécial des séries alternées ;
2. Regarder si la série est absolument convergente (voir méthodes ci-dessus appliquées à $\sum |u_n|$) ;
3. Calculer la somme partielle S_n et étudier la suite (S_n) .