Fiche méthode *Sciences physiques*

Notion d'intégrale en physique

Dans cette fiche, nous expliquons comment un physicien "voit" l'intégrale.
Pour cela, partons d'un exemple simple.

1. Position du problème

On considère une voiture avançant en ligne droite avec une accélération constante de norme a_0. À l'instant initial $t = t_0$, elle possède une vitesse nulle. v évolue donc linéairement avec le temps : $v(t) = a_0(t - t_0)$.

On se demande quelle est la distance D parcourue au bout d'une durée τ.

Si la voiture avançait à vitesse constante v_0, la réponse serait simple : $D = v_0\tau$. Mais justement, **la vitesse n'est pas constante** ici, on ne peut donc pas utiliser cette relation.

2. Discrétisation

On découpe le parcours en N petit parcours de durée $\Delta t = \dfrac{\tau}{N}$ chacun.
On définit alors les instants : $t_k = t_0 + k\Delta t$, où k est un entier compris entre 1 et N.

Pour estimer D approximativement, on considère qu'entre t_{k-1} et t_k , la vitesse reste constante et vaut $v(t_{k-1})$.

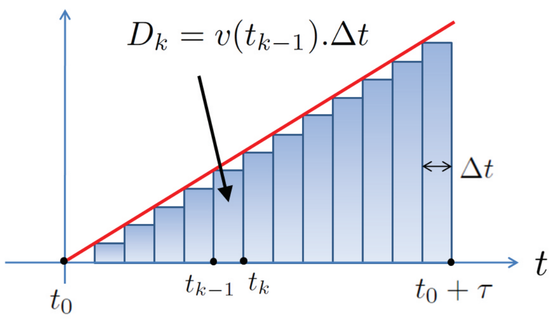
Alors, la durée D_k parcourue sur cet intervalle de temps est : $D_k = v(t_{k-1}).\Delta t$

Par cette méthode, on en déduit approximativement la distance totale :

$$D \simeq D_1 + D_2 + ... + D_n = \sum_{k=1}^{N} D_k = \sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t$$

Interprétation géométrique

$v(t) = a_0(t - t_0)$



Effectuer la somme :

$$D \simeq \sum_{k=1}^{N} D_k = \sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t$$

revient donc à calculer la **somme des aires** de chaque rectangle bleu sous la courbe de $v(t)$.

3. Passage à la limite

Le résultat sera d'autant moins approximatif que la segmentation est fine. Il faut donc **passer à la limite** $N \to \infty$ et donc $\Delta t \to 0$:

$$\sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D$$

On admet également que :

$$\sum_{k=1}^{N} v(t_{k-1}).\Delta t \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\mathrm{d}t$$

N.Gaudouen

Ce sera démontré en cours de mathématique de deuxième semestre.

Donc, par unicité de la limite : $D = \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\mathrm{d}t$

En passant à la limite, on dit que l'on passe d'une somme <u>discrète</u> de contributions D_k à une **somme <u>continue</u> et infinie de *contributions élémentaires*** $\delta D = v(t)\mathrm{d}t$, où $\mathrm{d}t$ représente une variation infinitésimale du temps :

$$\boxed{D = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \delta D = \int_{t_0}^{t_0+\tau} v(t)\mathrm{d}t}$$

Interprétation géométrique

En passant à la limite $\Delta t \to 0$ et $N \to \infty$, D tend à devenir *exactement* l'aire sous la courbe de $v(t)$ entre t_0 et $t_0 + \tau$.

R *Dans l'exemple précédent, il n'y a plus qu'à terminer le calcul intégral, sachant $v(t) = a_0(t - t_0)$:*

$$D = \int_{t_0}^{t_0+\tau} a_0(t - t_0)\mathrm{d}t = \left[\frac{a_0}{2}t^2 - a_0 t\right]_{t_0}^{t_0+\tau} = \ldots$$

Méthode : calcul intégral

Pour les questions du type "*calculer la **quantité** G entre les valeurs x_1 et x_2 de la variable du problème*" :

Méthode	***Exemple***
1. Exprimer la **contribution élémentaire** δG que l'on peut associer à G en fonction de la variation infinitésimale de la variable du problème, $\mathrm{d}x$: $$\delta G = f(x)\mathrm{d}x$$	On cherche la quantité totale de charge Q qui peut être débitée par une batterie dont l'intensité varie suivant : $$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \text{ , } \tau \text{ et } I_0 \text{ étant constants}$$ La quantité élémentaire de charge δQ débitée entre t et $t + \mathrm{d}t$ vaut par définition : $$\delta Q = i(t)\mathrm{d}t$$
2. Exprimer G comme la somme continue des contributions élémentaires δG : $$G = \int_{x_1}^{x_2} \delta G = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$	Ici, les deux bornes d'intégrations sont l'instant initial $t = 0$ (où la pile commence à débiter) et $t \to \infty$ (la pile arrête de débiter, càd intensité nulle, lorsque $t \to \infty$). D'où : $$Q = \int_0^\infty \delta Q = \int_0^\infty i(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty I_0 e^{-t/\tau}\mathrm{d}t$$
3. Faire le calcul de l'intégrale	$$Q = \left[-I_0 \tau e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = I_0 \tau$$