Fiche méthode : Réduction

I Eléments propres

1) Valeurs propres : définition et calcul.
Il faut savoir déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme :
a) En utilisant la définition : si l'énoncé donne un vecteur non nul tel que $f(x) = \lambda x$ ou $MX = \lambda X$, on sait que λ est une valeur propre de f (ou de M).

b) En prenant les valeurs diagonales si M est triangulaire.

c) En déterminant les valeurs de λ telles que la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible à l'aide de pivots sur la matrice $A - \lambda I$ (attention à la validité des pivots : un pivot non valide entraîne en général un zéro immédiat à la question !)

d) En résolvant l'équation $AX = \lambda X$: si l'énoncé donne les valeurs propres à trouver, on résout directement les systèmes pour les valeurs en question, plutôt que d'utiliser les pivots difficiles sur $A - \lambda I$.

e) En sachant qu'une matrice de taille n ou un endomorphisme d'un espace de dimension n admet au plus n valeurs propres : cela permet souvent, si l'énoncé a fourni n vecteurs fournissant n valeurs propres distinctes (cas a. ou d.) de vérifier qu'il ne peut pas y en avoir d'autres.

2) Vecteurs propres et sous-espaces propres.
Il faut savoir déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme :
a) En utilisant la définition : si l'énoncé donne un vecteur non nul tel que $f(x) = \lambda x$ ou $MX = \lambda X$, on sait que x ou X est un vecteur propre de f (ou M) associé à la valeur propre λ.

b) En résolvant l'équation $AX = \lambda X$: une fois les valeurs propres connues (ou si elles sont données par l'énoncé), on résout les systèmes pour les valeurs en question, en reprenant éventuellement la matrice triangulaire obtenue pour déterminer les valeurs propres.

c) En sachant que la somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice de taille n ou d'un endomorphisme d'un espace de dimension n est inférieure ou égale à n : cela permet souvent, si l'énoncé a fourni n vecteurs fournissant les valeurs propres et qu'on a déterminé les dimensions des sous-espaces propres, de vérifier qu'il ne peut pas y en avoir d'autres.

3 Utilisation en algèbre linéaire.
Il faut savoir :
a) qu'un endomorphisme (resp. une matrice) est bijectif (resp. inversible) si et seulement si 0 n'est pas valeur propre.

b) que le sous-espace propre associé à 0 est le noyau de l'endomorphisme ou de la matrice.

c) qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est toujours libre.

d) Plus généralement, que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

II Diagonalisation

1) Endomorphismes et matrices diagonalisables.
Il faut savoir prouver si endomorphisme est ou non diagonalisable :
a) en vérifiant si la matrice est symétrique (condition suffisante **mais évidemment pas nécessaire**).

b) en vérifiant s'il y a n valeurs propres distinctes en dimension n (condition suffisante **mais évidemment pas nécessaire**).

c) en utilisant l'existence d'une base de vecteurs propres : à utiliser lorsque l'énoncé donne des vecteurs et fait vérifier leur image pour prouver que ce sont des vecteurs propres.

d) en calculant la somme des dimensions des sous-espaces propres, qui doit valoir n (**condition nécessaire et suffisante**).

e) Un résultat hors programme dit qu'une matrice (ou un endomorphisme) est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Ce résultat difficile est parfois utilisé par des sujets dans une application pratique sur une matrice donnée, et il est intéressant de se présenter aux écrits en ayant déjà fait ce type de problème et en ayant compris le principe.

2) Diagonalisation effective.
Il faut savoir diagonaliser un endomorphisme ou une matrice, c'est-à-dire obtenir une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.
a) Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de M, qui apparaissent autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé : cela marche avec n'importe quel ordre, tant que les vecteurs propres pour obtenir P sont écrits dans le même ordre.

b) Si l'énoncé impose la matrice D, il faut bien évidemment écrire les valeurs propres dans l'ordre demandé.

c) P est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres : c'est en fait une matrice constituée de vecteurs propres (**en colonne !**) de M, écrits dans le même ordre que les valeurs propres associées dans D.

d) Si l'énoncé impose une condition sur la matrice P, il faut transformer les bases des sous-espaces propres avec des pivots en colonne sur chacune pour faire apparaître les bons vecteurs propres.

3) Trigonalisation.
La trigonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice est hors programme, mais elle est utilisée régulièrement par des sujets.
Il faut savoir déterminer la matrice dans une base donnée par l'énoncé d'un endomorphisme : on obtient (si l'énoncé cherche à trigonaliser !) une matrice triangulaire, puis on utilise celle-ci pour obtenir les puissances de la matrice (si c'est bien le but de l'exercice) : voir dans ce contexte la partie puissances de matrices de la fiche Matrices.