

Fiche méthode : Variables aléatoires

I Différents types de variables aléatoires et de lois.

1) Variables finies.

Une variable est finie si elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs :

- Pour déterminer sa loi, on détermine les valeurs prises et la probabilité de chaque valeur.
- On est alors certain qu'elle admet des moments de tous ordres, donc une espérance et une variance.
- De même un couple de variables finies admet toujours une covariance.

2) Variables discrètes.

Une variable est discrète si ses valeurs prises peuvent être indexées par $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$:

- Pour déterminer sa loi, on détermine les valeurs prises et la probabilité de chaque valeur.
- Pour vérifier qu'elle admet une espérance ou de manière générale un moment d'ordre k , il faut vérifier la convergence absolue d'une série.
- De même pour obtenir l'existence de la covariance d'un couple de variables discrètes, il faut vérifier la convergence absolue d'une série.

3) Couples.

- Pour définir complètement un couple, on détermine la loi conjointe, qui donne les probabilités des intersections d'événements liés aux deux lois.
- Les lois marginales (loi de chaque variable du couple) sont obtenues par les probabilités totales, ainsi que les probabilités d'événements du type $X = Y$, $X < Y$, la loi de $X + Y$, etc...
- Les lois conditionnelles sont obtenues grâce aux lois marginales et à la formule de Bayes.

II Fonction de répartition.

1) Définition

Il faut connaître la définition : $F_X(x) = P(X \leq x)$, et les propriétés de limites qui en découlent.

2) Lien avec la loi

Il faut savoir passer de la loi à la fonction de répartition et réciproquement, avec les propriétés :

$$P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k) \text{ et } P(X = x_k) = P(X \leq x_k) - P(X < x_k) = P(X \leq x_k) - P(X \leq x_{k-1}).$$

3) Loi de l'inf et du sup, ou du min et du max.

On calcule la loi du sup (ou max) et de l'inf (ou min) en passant par la fonction de répartition, en utilisant :
 $(\min(X, Y) > x_k) = (X > x_k) \cap (Y > x_k)$ et $(\max(X, Y) \leq x_k) = (X \leq x_k) \cap (Y \leq x_k)$.

III Espérance.

1) Linéarité de l'espérance.

On doit savoir que $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

2) Espérance de XY .

On doit savoir que si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

3) Théorème de transfert.

On doit savoir calculer $E[f(X)]$ à l'aide du théorème de transfert à une variable et $E[g(X, Y)]$ avec le théorème de transfert à deux variables.

IV Variance.

1) Variance de $aX+b$.

On doit savoir que $V(aX + b) = a^2V(X)$.

2) Variance de $X+Y$.

On doit savoir que $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$, et que cela donne $V(X) + V(Y)$ si les deux variables sont indépendantes.

3) Définition et théorème de Huyghens.

Dans 9 cas sur 10, la variance se calcule avec le théorème de Huyghens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, en utilisant le théorème de transfert pour le calcul du moment d'ordre deux.

Cependant la définition doit aussi être connue : $V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right)$; elle permet notamment de prouver que $V(X) \geq 0$, et d'en déduire que $E(X^2) \geq E(X)^2$.

V Covariance.

1) Définition et théorème de Huyghens.

Le calcul de la covariance par la définition (demandant la loi de $(X - E(X))(Y - E(Y))$) ou du théorème de Huyghens (demandant la loi de XY) n'est possible que si XY n'admet qu'un nombre fini et pas trop grand de valeurs, en général résumées dans un tableau.

2) Utilisation de la variance de $X+Y$.

Dans un cas plus compliqué, la seule chose possible est d'utiliser $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$ qui donne $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2} (V(X + Y) - V(X) - V(Y))$ ou une autre formule équivalente sur $X - Y$, etc...

3) Cas de la valeur 0.

Si $\text{cov}(X, Y) \neq 0$, X et Y ne sont pas indépendantes. **Attention, la réciproque est fausse !**

4) Coefficient de corrélation linéaire.

On doit connaître :

- La définition : $r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.
- Les valeurs possibles : on a toujours $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$.
- Le cas des valeurs limites : $|r(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X = aY + b$ ou $Y = aX + b$.
- Le cas de la valeur 0 : si $r(X, Y) \neq 0$, X et Y ne sont pas indépendantes. **Attention, la réciproque est fausse !**