Groupe étoilé

Maths SPÉ

Physique

Stage de Noël

EXERCICES

Lycée Carcado - 121, boulevard Raspail - 75006 Paris

ANNÉE SCOLAIRE 2016-2017

Mercredi :

1) Calorimétrie : (avec débit)

Un serpentin est immergé dans un calorimètre. On fait passer dans le serpentin un courant d'eau. A l'entrée, l'eau est à la température de 15°C, à la sortie elle est à la température du calorimètre qui, grâce à un chauffage électrique, est maintenue à 40°C.

a) Calculer la quantité d'énergie que doit fournir la résistance chauffante si le débit d'eau dans le serpentin est de 60 $g.min^{-1}$.

b) La résistance est de 10 Ω ; calculer l'intensité du courant.

c) On fait passer un autre liquide dans le serpentin et pour avoir les mêmes conditions (températures et intensité), on doit assurer un débit de 180 $g.min^{-1}$. Calculer la chaleur massique du liquide.

2) Pompe à chaleur :

On dispose de deux bassins d'eau de masses m_l et m_l / 5. On désire transformer le 1er en piscine chauffée et le 2nd en patinoire à l'aide d'une pompe à chaleur fonctionnant de manière réversible. La capacité thermique massique c_m de l'eau est donnée.

a) Initialement, $T_1 = T_2 = T_{ext} = 278\,K$. T_2 baisse de 5°C. Déterminer la température finale T_1 ainsi que le travail W à fournir (Indication : envisager une faible variation des températures sur un cycle).

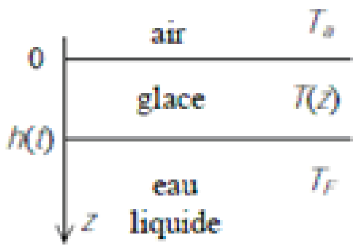
b) Dans une 2nde étape, l'eau du second bassin passe à l'état de glace. La chaleur latente massique de l'eau est L_f . Déterminer les nouvelles valeurs finales de T'_1 et W'.

c) Dans une troisième étape, la température de la glace est abaissée de 5°C . Déterminer les nouvelles valeurs finales de T''_1 et W''.

3) Formation d'une couche de glace : (Polytechnique)

1er modèle :

La température de l'air est T_a = 263 K et celle de l'eau liquide T_F = 273 K. On donne la chaleur latente de fusion de la glace L_f, sa masse volumique ρ et sa conductivité thermique λ. La capacité thermique massique de la glace est supposée négligeable.



a) Etablir des équations différentielles vérifiées par T(z) et h(z).

b) Les résoudre et déterminer h(t).

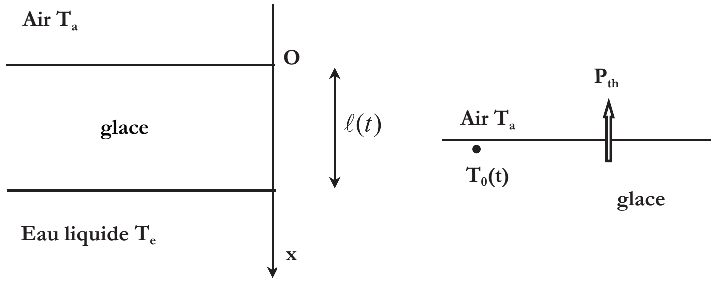
2nd modèle :

L'eau liquide d'un lac est à la température de congélation T_e = 273 K. L'air au-dessus du lac est à la température constante T_a = 263 K. Libre de glace à t = 0, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur est notée $\ell(t)$. La glace possède une masse volumique μ, une conductivité thermique K, une chaleur latente massique de fusion L_f et une capacité calorifique que l'on négligera.

D'autre part, la puissance thermique échangée à l'interface glace-air est donnée, pour une surface S de glace, par (loi de Newton) $P_{th} = \alpha(T_0(t) - T_a)S$, où $T_0(t)$ est la température de la glace en x = 0.

a) Déterminer l'épaisseur de glace $\ell(t)$ formée à l'instant t, ainsi que la température $T_0(t)$. On posera :

$$\ell_0 = \frac{K}{\alpha} \qquad et \qquad \tau = \frac{KL_f\mu}{2\alpha^2(T_e - T_a)}$$



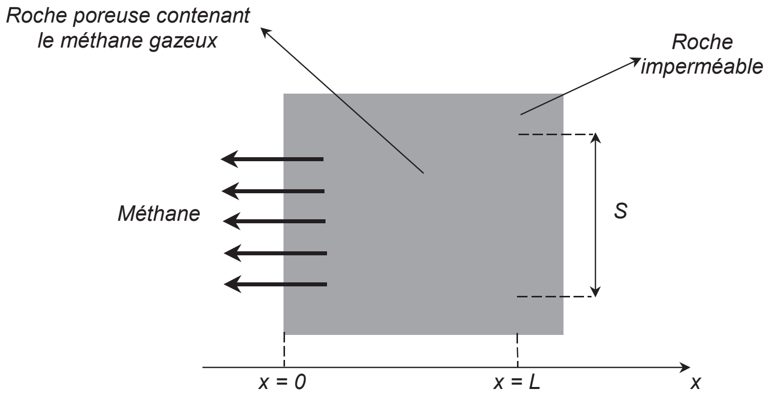
b) Tracer les graphes donnant $\ell(t)$ et $T_0(t)$. On exprimera $\ell(t)$ en cm et t en heures. On donnera également le taux d'accroissement $d\ell(t)/dt$ de l'épaisseur $\ell(t)$ de la couche de glace. Que vaut ce taux à $t = 0^+$?

Données :

$$\mu = 9.10^2 \ kg.m^{-3} \ ; K = 5.10^{-4} \ kcal.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1} \ ; L_f = 80 \ kcal.kg^{-1} \ ; \alpha = 10^{-2} \ kcal.m^{-2}.s^{-1}.K^{-1}$$

4) Extraction de gaz naturel :

On modélise un gisement de gaz naturel par une roche poreuse comprenant dans tout volume V un volume qV de méthane où la constante q est la porosité de la roche. Cette roche poreuse a la forme d'un cylindre de section circulaire S et de longueur L, limité sur ses bords et sur sa section x = L par une roche imperméable. La section x = 0 modélise le puits d'extraction du méthane et on admettra que la pression $P(x = 0,t) = P_0$ y est maintenue constante (P_0 = 1 bar).



Hypothèses :

• On néglige l'influence de la pesanteur.

• On suppose le problème unidimensionnel, de telle sorte que toutes les grandeurs physiques sont uniformes dans une section du cylindre ; on note x l'abscisse mesurée sur l'axe du cylindre, avec $0 \leq x \leq L$. On note P(x,t) la pression et $\mu(x,t)$ la masse volumique du gaz dans une section d'abscisse x.

• On suppose la température T = 300 K uniforme.

• On assimile le méthane à un gaz parfait de masse molaire $M = 16\,g.mol^{-1}$. On rappelle la constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\,J.K^{-1}.mol^{-1}$.

• L'écoulement du gaz naturel obéit à la loi de Darcy ; la masse dm_d de gaz qui traverse une section S de la roche poreuse d'abscisse x pendant une durée dt, comptée positivement dans le sens des x croissants, est de la forme :

$$dm_d = -\mu \frac{k}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} S\,dt = -\frac{k}{\nu} \frac{\partial P}{\partial x} S\,dt$$

où η est la viscosité du méthane, μ sa masse volumique et k la perméabilité de la roche poreuse. μ et η dépendent de la pression ; en revanche, k et la viscosité dynamique $\nu = \eta / \mu$ sont des constantes.

1. Exprimer la masse volumique $\mu(x,t)$ en fonction de la pression P(x,t) et des constantes T, M et R.

2. Exprimer en fonction de $\mu(x,t)$, q, S et dx la masse dm de gaz naturel contenue à l'instant t entre les sections d'abscisses x et x + dx.

3. Exprimer en fonction de $\partial^2 P / \partial x^2$, k, ν, S, dx et dt, la variation de la masse de gaz naturel comprise entre les sections d'abscisses x et x + dx, pendant l'intervalle de temps dt.

4. En déduire que la pression P(x,t) est solution de l'équation (E) :

$$D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t} \qquad \text{(E)}$$

où D est une constante qu'on exprimera en fonction de k, ν, M, R, T et q. Citer un autre phénomène physique guidé par une équation aux dérivées partielles analogue. Dans la suite, on prendra $D = 3.10^{-2}\ SI$ et q = 0,15.

5. On cherche une solution de l'équation (E) qui peut s'écrire sous la forme :

$$P(x,t) = P_0 + P_1 \sin(\alpha x) \exp(-t/\tau)$$

où α et τ sont des constantes positives.

a) Déduire de la présence de la roche imperméable en x = L, les valeurs possibles de α en fonction de L et d'un entier n.

Dans toute la suite, on adopte la plus petite valeur possible de α.

b) Déterminer τ en fonction de D et L.

c) Exprimer la masse m(t) de méthane contenue dans le gisement à la date t en fonction de P_0, P_1, S, L, q, M, R, T, D et t.

d) Sachant que $P_1 = 100 P_0$ et L = 5 km, calculer en années la date t^* à laquelle 95% du méthane contenu dans le gisement a été récupéré et commenter.

Tracer les représentations graphiques de m(t) / S puis du rapport des pressions $P(x,t) / P_0$ en fonction de x, pour t = 1, 10, 30 et 40 ans.

5) Approche probabiliste de la diffusion :

Dans un tube cylindrique compris entre x = - L / 2 et x = L / 2, des neutrons sont répartis à un instant $t_p = p\tau$ avec p entier sur des sites discrets d'abscisses $x_p = na$ avec n entier.

Entre les instants t_p et t_{p+1}, chaque neutron a une probabilité $\alpha\tau$ de disparaître.

S'il ne disparaît pas, il a une même probabilité d'effectuer un saut vers l'un ou l'autre des deux sites voisins situés à sa gauche et à sa droite.

1- On note p (x_n, t_p) la probabilité pour un neutron donné d'être en x_n à l'instant t_p.

Exprimer p (x_n , t_{p+1}) en fonction de p (x_{n-1}, t_p) et de p (x_{n+1}, t_p).

2. On fait l'approximation des milieux continus.

Montrer que p (x, t) est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha\, p + D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

et exprimer D en fonction des données.

Vérifier son homogénéité.

De quelle équation aux dérivées partielles est solution la densité linéique n (x, t) de neutrons ?

3. On suppose que le matériau reçoit en x = ± L / 2 un flux stationnaire de neutrons.

Déterminer n(x) en régime stationnaire.