Intégration sur un intervalle

L'histoire de la théorie de l'intégration est typique du cheminement des idées mathématiques. Les mathématiciens de la fin du XVII^{e} et du début du XVIII^{e} siècle ont utilisé le calcul différentiel et intégral sur des bases intuitives. Ce mot provient du latin *integer* signifiant *non touché* donc *intact*. Par extension, il qualifie ce qui forme un tout. L'anglais l'a repris pour désigner un entier comme on le voit dans les programmes informatiques. Jacques Bernoulli reprend en 1696 l'adjectif latin *integralis* pour parler du calcul intégral naissant.

En 1832, les travaux de Cauchy sur la notion de limite lui permettent de définir rigoureusement l'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.

En 1854, Bernhard Riemann, dans son mémoire sur les séries trigonométriques, élargit le problème en cherchant à préciser les fonctions auxquelles cette définition s'applique. Il introduit les fonctions intégrables au sens de Riemann, un ensemble complexe, difficile à manipuler.

1 Problème général sur l'intégration

Exercice 1*.

f est une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Montrer la convergence d'une intégrale impropre à l'aide des théorèmes de comparaison

L'application f étant continue par morceaux sur $[a, b[$ (b réel ou $+\infty$), soit l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette méthode sera mise en œuvre s'il semble difficile de déterminer une primitive de f sur $[a, b[$ ou si le calcul effectif de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas demandé.

- Les théorèmes de comparaison ont été établis pour des fonctions **positives**. Il est donc indispensable de se poser la question du signe de f sur $[a, b[$.
  Rappelons que : si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ et si g est de signe constant sur $[a, b[$, alors il existe $c \in [a, b[$ tel que f soit du signe de g sur $[c, b[$.
- Si le signe de f n'est pas constant sur $[a, b[$ ou si f est à valeurs complexes, on cherche à évaluer la convergence absolue de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en considérant $|f|$.
- Le but du jeu est, ensuite, de comparer f ou $|f|$ à une fonction dont l'intégrale sur $[c, b[$, $c \in [a, b[$, est une intégrale de référence (nature établie en cours).
- Cette comparaison pourra s'effectuer par majoration-minoration ou par équivalence.

2 Calculs d'intégrales

Exercice 2. (Règle de Bioche)

Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $u = \tan\dfrac{x}{2}$.

Déterminer une primitive d'une fonction rationnelle

Le raisonnement se décompose en plusieurs étapes :

1. Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples de plusieurs types :
   (a) Éléments simples de première espèce : $\dfrac{1}{(x-a)^n}$ où n est un entier naturel.
   (b) Éléments simples de deuxième espèce : $\dfrac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n}$ où n est un entier naturel et $b^2-4ac<0$.
2. Pour calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$, deux cas simples possibles : si $n=1$ une primitive sera une fonction logarithme et si $n \neq 1$ une primitive sera une fonction puissance négative de $x-a$.
3. Pour calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n}$:
   (a) Si $\lambda \neq 0$, on peut faire apparaître au numérateur de la fonction, à une constante multiplicative et additive près, la dérivée de ax^2+bx+c. Une primitive sera dans le cas $n=1$ un logarithme de $|ax^2+bx+c|$ et dans le cas $n \neq 1$ une fonction puissance négative de ax^2+bx+c.
   (b) Si $\lambda = 0$, on peut passer, par une changement de variable affine en utilisant la forme canonique de ax^2+bx+c, de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$ à $I_n(t) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$.
   À l'aide d'une relation de récurrence obtenue grâce à une intégration par partie, on obtient : $I_n(t) = \dfrac{t}{(t^2+1)^n} + 2n(I_n(t) - I_{n+1}(t))$ sachant que $I_1(t) = \arctan t$.

Exercice 3*.

Établir la convergence et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, en pratiquant successivement les changements de variable $x=\sin t$, puis $u=\tan t$.