# Équations différentielles

**Point méthode**

La solution générale de l'équation différentielle

$$\text{(E) } y' + ay = b$$

est la somme d'une solution particulière avec la solution générale de l'équation différentielle homogène associée. Pour résoudre l'équation homogène définie sur $I$ :

$$(E_0\ )\ y' + a(x)y = 0$$

La solution générale de $(E_0)$ est l'ensemble des fonctions **définies sur** $I$ par $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\int a(t)dt} = \lambda e^{A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A$ est une primitive de $a$ sur $I$.

**Point méthode**

Pour déterminer une solution particulière, énonçons plusieurs méthodes :

– $(E)$ admet une solution évidente sous la forme du second membre.

– **Principe de superposition des solutions**. Si le second membre $b$ se décompose de manière simple en une combinaison linéaire de plusieurs fonctions de types variés $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$, on pourra déterminer, pour chaque équation $(E_k)$ $y' + ay = b_k$ une solution particulière $y_k$, puis $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E).

– **Méthode de variation de la constante (Méthode de Lagrange).** En partant de la solution générale de l'équation homogène sous la forme $y = \lambda e^{-A}$ dans l'intervalle $I$, on fait "varier la constante" en cherchant une solution particulière de l'équation différentielle sur $I$ sous la forme :

$$y_0(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}.$$

En injectant la fonction dans l'équation différentielle, on obtient généralement une équation différentielle plus simple d'inconnue la fonction $\lambda$.

**Point méthode**

Une équation différentielle linéaire du premier ordre se présentant sous la forme $(E) \mid a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ s'étudie en plusieurs étapes :

1. Changer la forme de l'équation : toute fonction solution de $(E)$ est, sur $J = I - \{x \in I, a(x) \neq 0\}$, solution de l'équation $y' + \dfrac{b(x)}{a(x)}y = \dfrac{c(x)}{a(x)}$ dont nous connaissons une solution générale sur tout intervalle inclus dans $J$.
2. Déterminer les limites des fonctions et de leurs dérivées en fonction des constantes sur chaque intervalle composant $J$ puis déterminer ces réels afin d'obtenir les mêmes limites à gauche et à droite sur les éléments de $I - J = \{x \in I, a(x) = 0\}$.

Cours THALÈS

## Point méthode

On s'intéresse à une équation différentielle (non nécessairement linéaire) de la forme :

$$(E) \qquad y' = f(t, y)$$

où $f$ est une fonction de deux variables.
Le principe de cette méthode numérique est simple :
il consiste à dire que entre les valeurs $t_0$ et $t_0 + h$ (où $h$ est le *pas* de la méthode), la solution $y$ de $(E)$ sera proche de sa tangente en $(t_0, y(t_0))$, donnée par l'équation

$$y = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0).$$

Nous allons donc découper l'intervalle d'étude $[a, b]$ en un nombre suffisamment grand de petits intervalles de types $[t, t + h]$.
Par exemple, on peut prendre $h_n = \frac{b-a}{n}$ et on obtient une *subdivision* en $n + 1$ points de $[a, b]$, de pas $h_n$, donnée par : $t_0 = a$ et $t_i = t_0 + i \times h_n$ pour $i = 1, ..., n$.
Sur cette subdivision, nous construisons une fonction *affine par morceaux* en joignant les points $(t_i, y_i)$, où $y_0$ est choisi arbitrairement (condition initiale) et où

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \qquad y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i).$$

La ligne polygonale représentant cette fonction affine sera une approximation de la courbe représentant la solution $y$ de $(E)$ vérifiant $y(a) = y_0$.

Cours THALÈS

## Point méthode

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $g$ est une fonction continue définie sur $I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Considérons :

$$\text{(E) } y'' + ay' + by = g$$

$$(E_0) \ y'' + ay' + by = 0$$

La solution générale sur $I$ de (E) est la somme de la solution générale de $(E_0)$ et une solution particulière de(E).
Pour résoudre l'équation homogène $(E_0)$, on procède de la manière suivante :
Considérons l' **équation caractéristique** $r^2 + ar + b = 0$ (inconnue $r \in \mathbb{K}$) et son discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

- **1° cas :** L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{K}$ deux solutions $r_1$, $r_2$ distinctes alors la solution générale de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

  où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
- **2° cas :** L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{K}$ une solution double $r_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)$ (c'est à dire $\Delta = 0$) alors la solution générale de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

  où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
- **3° cas :** L'équation caractéristique n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$ (c'est à dire : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Delta < 0$ et deux solutions complexes conjugués : $z = \alpha \pm i\beta$) alors la solution générale de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$y(x) = (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$

ou,

$$y(x) = A \cos(\beta x - \varphi) e^{\alpha x} \text{ où } (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

## Point méthode

Pour déterminer une solution particulière, énonçons plusieurs méthodes :

- $(E)$ admet une solution évidente sous la forme du second membre.
- **Principe de superposition des solutions**. Si le second membre $b$ se décompose de manière simple en une combinaison linéaire de plusieurs fonctions de types variés $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$, on pourra déterminer, pour chaque équation $(E_k)$ $y'' + ay' + cy = b_k$ une solution particulière $y_k$, puis $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E).
- Si le second membre est sous la forme $e^{mx} P(x)$, chercher une solution sous la forme $e^{mx} Q(x)$ où le degré du polynôme $Q$ dépend celui du polynôme $P$ de la manière suivante :
  - $\deg(Q) = \deg(P)$ si $m$ n'est pas solution de l'équation caractéristique
  - $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ si $m$ est solution simple de l'équation caractéristique
  - $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ si $m$ est solution double de l'équation caractéristique.

Cours THALÈS