Fiche méthode : Algèbre linéaire

I Espaces et sous-espaces vectoriels

1) Sous-espaces vectoriels.
Il faut savoir prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel :
a) Avec la définition : 0 est dans l'ensemble, stabilité par combinaison ou semi-combinaison linéaire.
b) En utilisant les sous-espaces vectoriels particuliers : sous-espace engendré par une famille, sous-espaces propres.
c) En utilisant les applications linéaires : reconnaître un noyau ou une image.

2) Montrer l'égalité de deux espaces, démontrer une équivalence.
Il faut savoir décomposer les problèmes :
a) Une égalité de deux sous-espaces se montre par double inclusion, ou avec une inclusion et une égalité de dimension.
b) Une inclusion d'ensembles s'obtient en revenant aux éléments, et en connaissant l'écriture d'un élément d'un noyau, d'une image, d'un espace vectoriel engendré, etc...
c) Une équivalence se montre par double implication.
d) **On traduit les questions au brouillon** : les notions d'algèbre linéaire sont abstraites et même parfois obscures, il faut écrire les définitions des éléments considérés dans une question pour traduire la question en un résultat concret à prouver. **A moins d'être exceptionnel, on ne trouvera pas dans sa tête et sans effectuer cette opération un raisonnement d'algèbre**.
e) On n'hésitera pas à utiliser le raisonnement par analyse-synthèse.

3) Opérations sur les sous-espaces vectoriels.
Il faut connaître les définitions :
a) De l'intersection et de la somme de deux sous-espaces.
b) Savoir que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.
c) Savoir que pour prouver que deux sous-espaces sont supplémentaires, il faut prouver deux des trois propriétés : $F \cap G = \{0\}$, $F + G = E$, $\dim F + \dim G = \dim E$.
Enfin on notera que parmi ces trois propriétés, $F + G = E$ est en général de loin la plus difficile à prouver.

II Familles

1) Familles libres.
a) On résout le système d'équation $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0$ d'inconnues $\lambda_i,\ i \in I$ et on prouve que la seule solution est 0. C'est un problème d'unicité.
b) Cette méthode conduit donc à des pivots **en ligne**.
c) Une famille libre permet d'affirmer que toute combinaison linéaire de cette famille est unique.
d) Il faut connaître les cas particuliers de deux vecteurs (libres si et seulement si ils ne sont pas colinéaires) et d'une famille échelonnée (toujours libre).

2) Familles génératrices.
a) Prouver qu'une famille est génératrice est un problème d'existence, en général plus difficile que l'unicité et donc la liberté.
On pourra alors avantageusement raisonner par analyse-synthèse.
b) Un pivot **en colonne** sur une famille de vecteurs ne change pas l'espace vectoriel engendré.
c) Si l'un des vecteurs d'une famille génératrice est combinaison linéaire des autres, on peut le retirer et on obtient une famille **qui engendre le même espace**.
d) Une famille génératrice permet d'affirmer que tout élément de l'espace est combinaison linéaire de la famille.

3) Bases.
Il faut connaître :
a) La définition : famille libre et génératrice.
b) L'interprétation : tout élément de l'ensemble est combinaison linéaire unique de la famille.
c) La définition des coordonnées ou composantes sur une base.
d) Le cas de la dimension finie : une famille ayant le bon nombre de vecteurs est une base si et seulement si elle est libre si et seulement si elle est génératrice (en général on utilise la liberté !)
e) L'utilisation pour la caractérisation de l'image d'une application linéaire comme espace engendré par l'image d'une base.
f) La concaténation de bases de sous-espaces supplémentaires (ou plus généralement d'espaces en somme directe) donne une base de la somme.

III Applications linéaires

1) Prouver qu'une application est linéaire.
On peut utiliser la caractérisation par l'image d'une combinaison linéaire, par l'image d'une semi-combinaison linéaire, ou encore l'image d'une somme et d'un produit par un scalaire.

2) Noyau.
Il faut savoir :
a) Calculer un noyau, en résolvant un système d'équation (ou une équation fonctionnelle).
b) Savoir que cette méthode conduit à des pivots **en ligne**.
c) Obtenir une base du noyau en utilisant le passage du système d'équations cartésiennes à la base.
d) Connaître parfaitement la définition et la caractérisation d'un élément du noyau.
e) Connaître parfaitement le lien entre noyau et injectivité.

3) Image.
Il faut savoir :
a) Calculer une image, en résolvant l'équation $f(x) = y$ pour obtenir un système d'équation cartésienne. Cette méthode conduit à des pivots **en ligne**.
b) Obtenir une base en utilisant l'image d'une base pour obtenir un système générateur, puis une base avec des pivots en colonnes (ou leur équivalent sur des vecteurs autres que dans $\mathbb{R}^n$) ou en retirant des vecteurs s'écrivant en fonction des autres jusqu'à obtenir une famille libre. Cette méthode conduit à des pivots **en colonnes ou en lignes**.
c) Connaître parfaitement la définition et la caractérisation d'un élément de l'image, sous les formes $\{f(x)|x \in E\}$ (qui mène à la méthode b) et $\{y \in F|\exists x \in E, f(x) = y\}$ (qui mène à la méthode a).
d) Connaître parfaitement le lien entre image et surjectivité.

4) Théorème du rang.
Le théorème du rang, fondamental, doit bien sûr être connu, mais aussi le lemme qui permet de le prouver : tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image. Il faut toujours penser, lorsqu'on a calculé soit le noyau soit l'image d'une application linéaire, à déterminer sa dimension puis celle de l'autre espace par le théorème du rang. Cela facilitera le calcul de ce second espace.

5) Projecteurs et symétries.
Il faut connaître :
a) La définition : $p^2 = p$ pour un projecteur, $s^2 = \mathrm{id}$ pour une symétrie.
b) Que tout projecteur est diagonalisable, avec pour valeurs propres 0 et 1.
c) Que toute symétrie est diagonalisable, avec pour valeurs propres -1 et 1.
d) Connaître la caractérisation de l'image d'un projecteur : $\mathrm{Im}\, p = \ker(p - \mathrm{id}) = \{x \in E\ ,\ p(x) = x\}$ (très pratique pour calculer l'image d'un projecteur, car cela permet de se ramener à un calcul de noyau).